Tema 10: Descripción física del Universo, Cosmología clásica

Consultar: **"An Introduction to Modern Cosmology", Liddle, libro entero**

"*Galaxies and Cosmology",* Jones & Lambourne, 2007, Cambridge, temas 5-7 (J&L07).

NASA Extragalactic Database (NED) Level 5: http://ned.ipac.caltech.edu.

Ned Wright's Cosmology web pages: http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm.

Objetivos del tema

- Introducir el concepto de expansión del Universo y las ecuaciones que lo caracterizan.
    - ¿Qué significa que el Universo se expande?
    - Conceptos de coordenadas (y distancias).
    - Derivación clásica de la ecuación de Friedmann y del fluido.
    - Parámetros clave que describen la expansión.

Concepto de Universo en expansión

La ecuación principal de la Gravitación Universal de Newton:

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad U = -\frac{GMm}{r}$$

Si consideramos la energía total (cinética más potencial) de una partícula de prueba de masa m que está dentro del Universo:

$$U = -\frac{GmM}{r} = -\frac{Gm\rho \, \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m$$

Coordenadas físicas y comóviles

La ecuación anterior describe la evolución de la separación entre dos puntos del Universo.

En Cosmología se utiliza el concepto de coordenadas comóviles. Estas coordenadas siguen la expansión, no están afectadas por ella de manera que dos puntos cuyo movimiento está dominado por la expansión del Universo mantienen siempre las mismas coordenadas.

La relación entre un vector en coordenadas reales o, mejor dicho, físicas $\vec{r}$, y un vector en coordenadas comóviles $\vec{x}$ es:

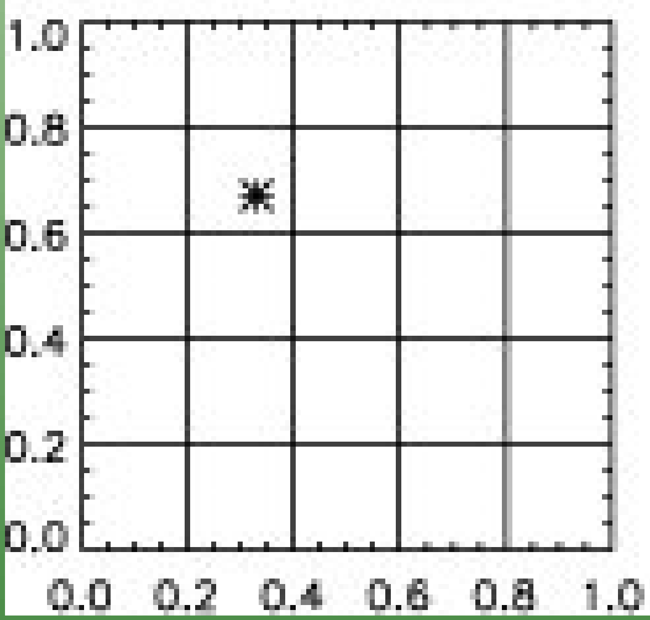
$$\vec{r} = a(t)\,\vec{x}$$

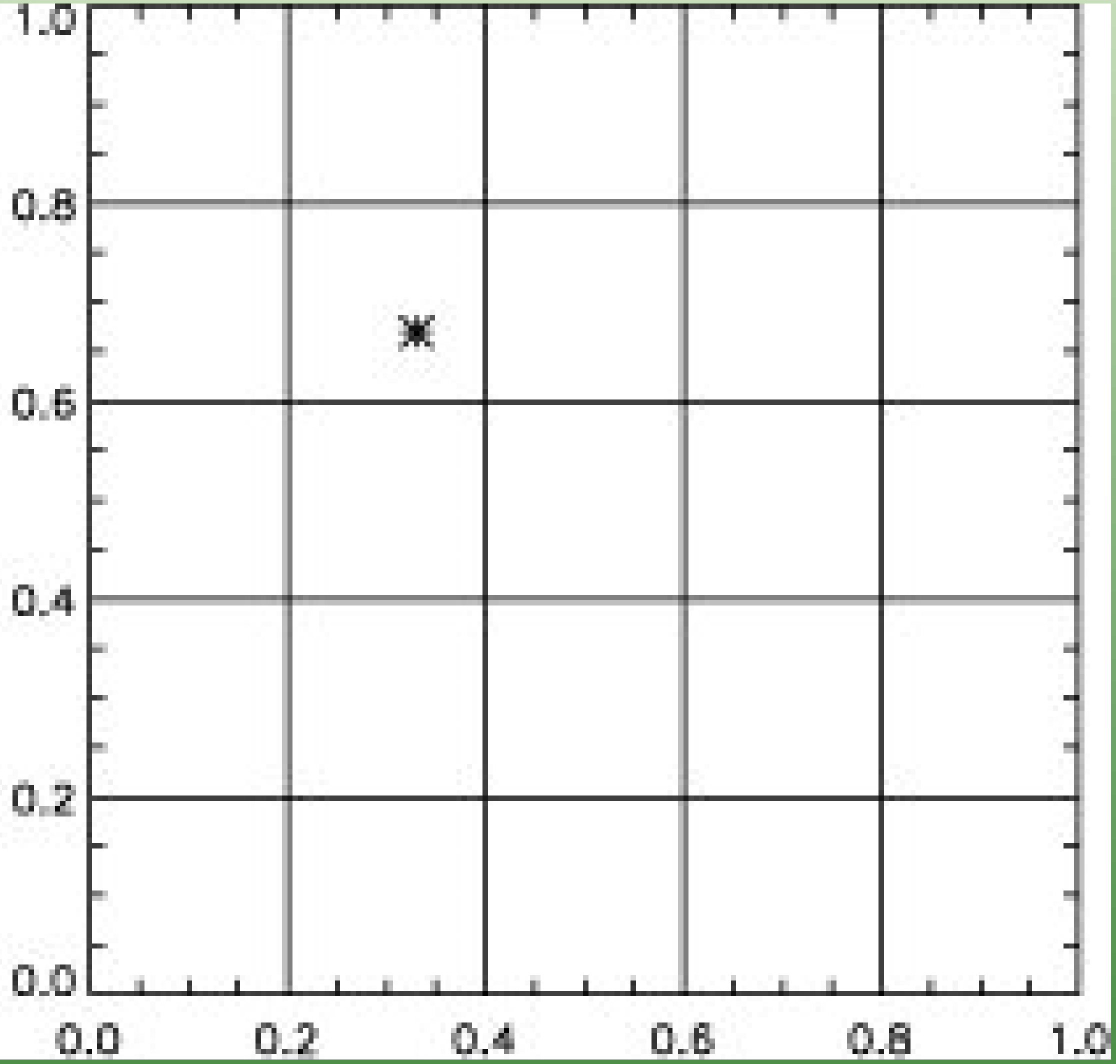
donde a(t) sería el factor de escala del Universo y solo depende del tiempo, porque el Universo es homogéneo (y no puede haber partes del Universo que se comporten de forma diferente). Se define de manera que a(t=0)=1.

La distancia física o propia entre dos galaxias depende directamente del factor de escala: si este se dobla entre un tiempo t_1 y un tiempo t_2, entonces la distancia entre las galaxias es el doble en t_2 en comparación con t_1.

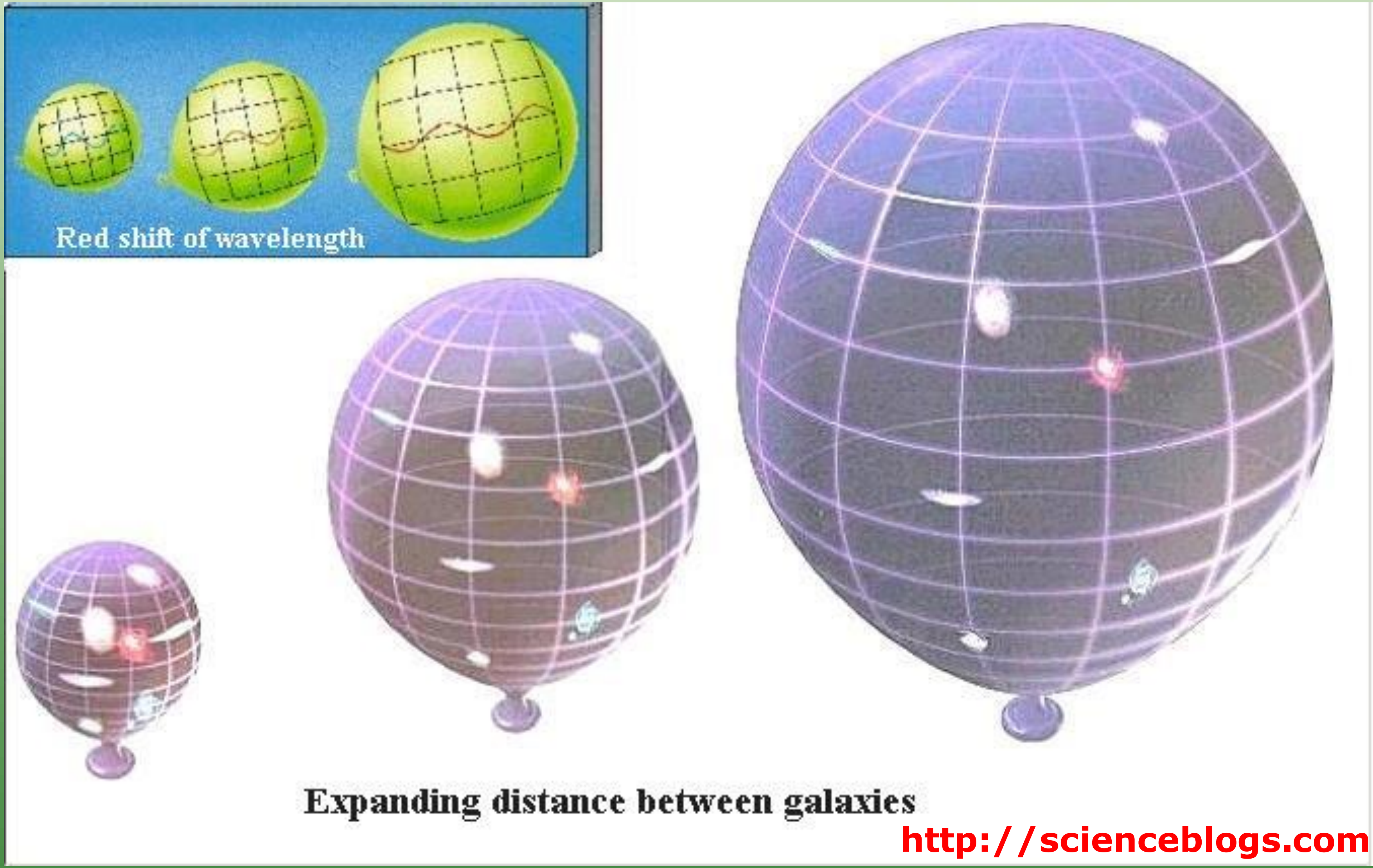
Concepto de Universo en expansión

http://www.jrank.org/space/pages/2266/comoving-coordinates.html





Concepto de Universo en expansión



Distancia propias y comóviles

Ejemplos y consideraciones:

- **Densidad de población de galaxias** que se fusionan: se debe usar distancia comóvil. Una población de galaxias que no evoluciona debe mantener su densidad constante, por lo que el volumen que debemos considerar debe ser constante, y eso implica el uso de coordenadas comóviles. Si queremos medir cómo se fusionan las galaxias debemos separar el cambio de densidad por el efecto de la expansión del Universo, por lo que debemos usar coordenadas comóviles.
- **Velocidad de un jet:** deben usarse distancias comóviles si se calcula a partir de una distancia recorrida y un tiempo.
- **Señal de la galaxia original al grumo del jet:** se debe usar distancia propia porque el grumo puede entrar en el flujo de Hubble y estar más lejos de lo que ha recorrido por su velocidad.
- **Distancia entre capas:** si la distancia comóvil no cambia no ha habido evolución, pero la distancia propia siempre cambiará.
- **Desconexión entre puntos del Universo por expansión:** la luz tiene una velocidad finita y debe recorrer distancias físicas.
- El factor de escala es 1 en t=0 (salvo que se renormalice, que a veces conviene) y decrece hacia el pasado porque el Universo se expande. ¿Llegó a a(t)=0? Sería un problema…

La ecuación de Friedmann

La energía de la partícula prueba sería:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3} G\rho r^2 m$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3} G\rho a^2 x^2 m$$

Donde se ha utilizado el hecho de que la derivada temporal de las coordenadas comóviles es nula (siguen la expansión). $\dot{x} = 0$

Reorganizando:

$$\frac{1}{2} m\dot{a}^2 x^2 = E + \frac{4\pi}{3} G\rho a^2 x^2 m$$

$$\dot{a}^2 = \frac{2E}{x^2 m} + \frac{8\pi}{3} G\rho a^2$$

La ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2E}{x^2 m a^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \qquad kc^2 = -\frac{2E}{m x^2}$$

Esta es la conocida como ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

k es la curvatura del Universo. k debe ser independiente de x porque todos los demás términos de la ecuación lo son y si no no se mantendría la homogeneidad del Universo. Esto significa que la energía de una partícula, que debe ser constante, debe cambiar si miramos a diferentes distancias comóviles y depende de x^2: $E \sim x^2$.

Las unidades de k son m^{-2} si el parámetro de escala se utiliza sin unidades. A veces a(t) se redefine en unidades de longitud y entonces k carecería de unidades.

Concepto de Universo en expansión

El parámetro k es constante en el espacio y también en el tiempo, ya que le energía E se conserva y x es constante en el tiempo.

Por tanto, la constante k es una característica esencial del Universo, que se conserva durante todo su vida.

La expansión del Universo debe entenderse en términos adecuados:

- **se habla de expansión en escalas en las que el movimiento de las partículas y su comportamiento están dominadas por la gravedad del resto del Universo.**
- **la anterior afirmación excluye que se pueda hablar de expansión dentro de, por ejemplo, el Sistema Solar, donde el movimiento está dominado por la gravedad del Sol.**
- **excluye un objeto en la Tierra, donde su comportamiento está dominado por fuerzas de ligadura entre átomos y moléculas.**
- **excluye las galaxias, donde el movimiento de sus componentes está dominado por la masa dentro de la galaxia.**
- **excluye los cúmulos de galaxias, dominados por la atracción gravitatoria entre las galaxias miembro del cúmulo y la DM.**
- **se refiere a escalas en las que el Universo es homogéneo, con una distribución "suave", e isotrópico: >200 Mpc. En esas escalas se pueden aplicar la ecuación de Friedmann.**

La ecuación del fluido

La ecuación de Friedmann depende directamente de la densidad del Universo. Esto implica que necesitamos otra ecuación fundamental para describir el Universo que nos diga cómo se comporta esa densidad.

Este ecuación se puede obtener considerando el material del Universo (y, por tanto, todo él) como un fluido al que se puede aplicar la primera ley de la Termodinámica:

$$dE + pdV = TdS$$

donde E es la energía, p la presión, V el volumen, T la temperatura y S la entropía.

Considerando $E=mc^2$ en función de la densidad:

$$E = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2$$

La ecuación del fluido

Introduciendo ésta en la ley de la Termodinámica:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 c^2 \frac{d\rho}{dt}$$

El cambio de volumen sería:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}$$

Asumiendo un proceso adiabático reversible (el Universo está aislado) dS=0:

$$4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 c^2 \frac{d\rho}{dt} = -4\pi p a^2 \frac{da}{dt}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

La ecuación de estado

La ecuación anterior se llama la ecuación del fluido. En ella se comprueba que el cambio en la densidad del Universo se debe al cambio en el factor de escala, es decir, la densidad debe decrecer debido a la expansión del volumen del Universo. También puede haber un cambio de densidad asociado a la perdida de energía que conlleva la presión que la materia ejerce a medida que el Universo se expande.

Esta energía no puede desaparecer, por supuesto, sino que se ha transformado en energía potencial gravitatoria.

Las dos ecuaciones anteriores son las fundamentales para un Universo en expansión, pero no se pueden resolver hasta que no se sepa cómo se comporta la presión p.

El comportamiento de la presión se describe especificando "lo que compone el Universo" (lo que hay en el Universo). En este sentido, la presión p debe ser una función de la densidad, y esa función se denomina ecuación de estado.

Una vez asumida una ecuación de estado del Universo, se procede a resolver las ecuaciones de Friedmann y del fluido. Esto es la base de un modelo cosmológico (clásico, en el caso relativista se añaden un par de conceptos más).

Aceleración de la expansión del Universo

Algunas consideraciones más sobre las ecuaciones que describen el Universo. Derivando la ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

$$2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{kc^2}{a^3}\dot{a}$$

Sustituyendo la derivada temporal de la densidad por su valor según la ecuación del fluido:

$$2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\left[-3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\right] + 2\frac{kc^2}{a^3}\dot{a}$$

Aceleración de la expansión del Universo

$$2\left(\frac{\ddot{a}a-\dot{a}^2}{a^2}\right)=\frac{8\pi G}{3}\left[-3\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\right]+2\frac{kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=-4\pi G\left[\rho+\frac{p}{c^2}\right]+\frac{kc^2}{a^2}$$

Utilizando la ecuación de Friedmann de nuevo:

$$\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{kc^2}{a^2}=-4\pi G\left[\rho+\frac{p}{c^2}\right]+\frac{kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)$$

Aceleración de la expansión del Universo

La ecuación que describe la aceleración del Universo (no fundamental) nos dice que la densidad de materia frena la expansión, así como también lo hace cualquier presión que tenga el material que compone el Universo.

Es de destacar que la (des)aceleración del Universo no depende de la curvatura k.

Unidades naturales

Las ecuaciones fundamentales en Cosmología a veces se escriben en unidades naturales en las que c=1. Con esto serían:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

Y la ecuación derivada de las anteriores para la aceleración del Universo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

10.2.La geometría del Universo

La ecuación de Friedmann depende de un parámetro k cuya interpretación (contando con la Teoría de la Relatividad General) es la curvatura de las dimensiones espaciales del Universo.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

Hay 3 posibles geometrías del Universo, las tres cumpliendo el principio de isotropía y homogeneidad. Estas 3 geometrías corresponden a valores positivos, negativos o nulo de la constante k.

Geometría plana

La geometría más simple que el Universo puede tener es la plana o Euclídea. Corresponde a k=0 y se define de la siguiente manera:

- **Los ángulos de un triángulo suman 180º.**
- **La longitud de la circunferencia es 2πr.**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

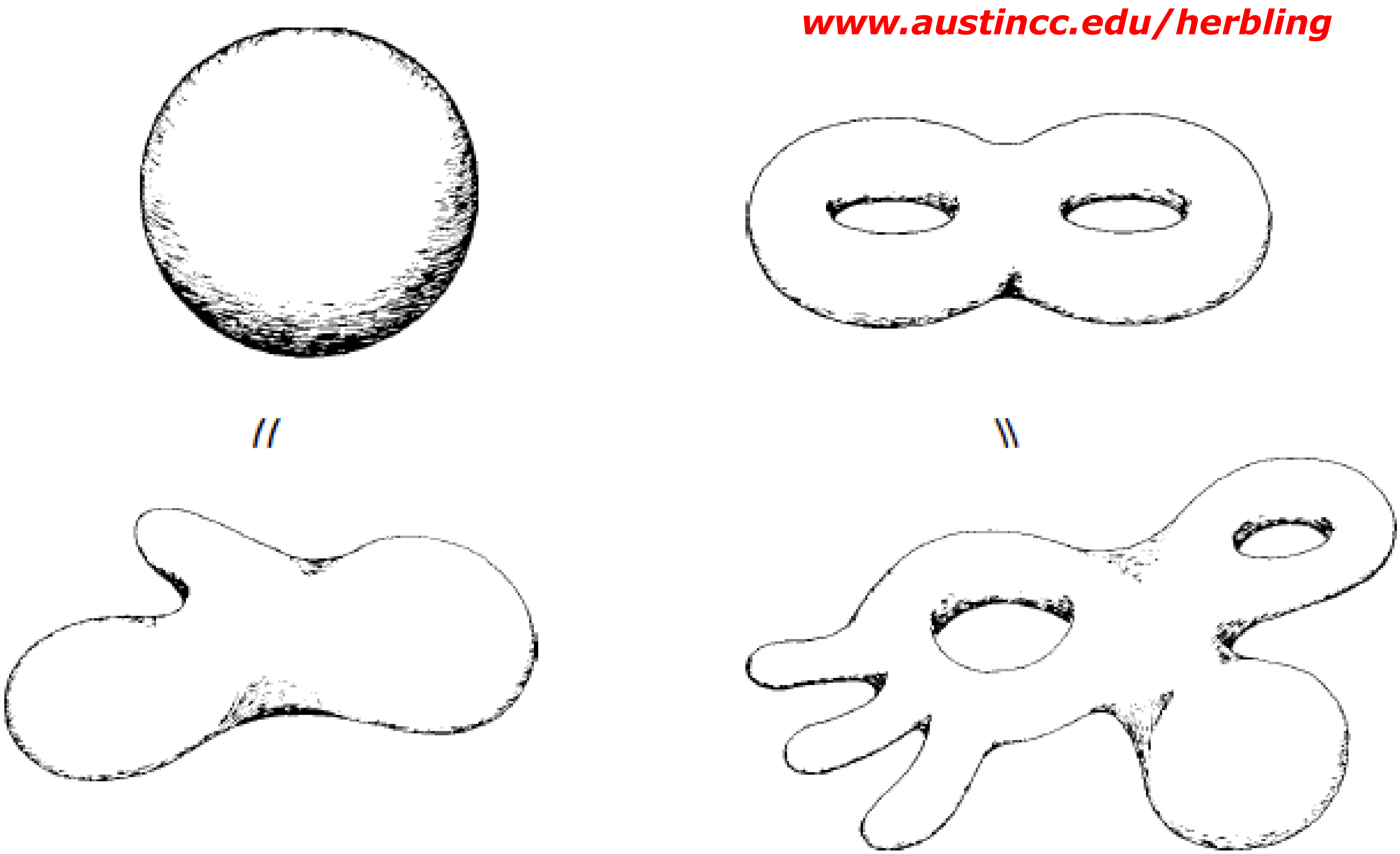
En el caso de k=0 el Universo debe ser infinito o ser finito pero con una "topología compleja o no trivial" que lo haga ilimitado.

La geometría se refiere a las propiedades espaciales locales, mientras que la topología se refiere a las propiedades globales del espacio.

La topología se refiere a los aspectos de una superficie que no están afectados por deformaciones.

La geometría consiste en esas propiedades que sí cambian al deformar superficies. La propiedad geométrica más importante es la curvatura. Otras son el área, distancia, ángulo.

Geometría plana

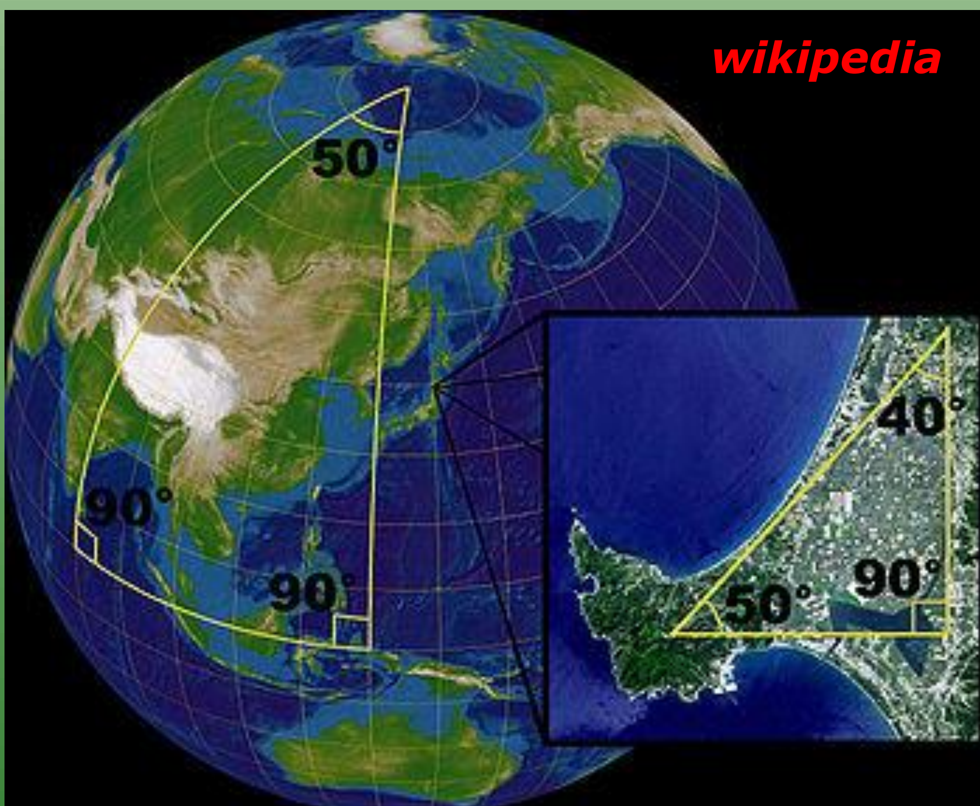


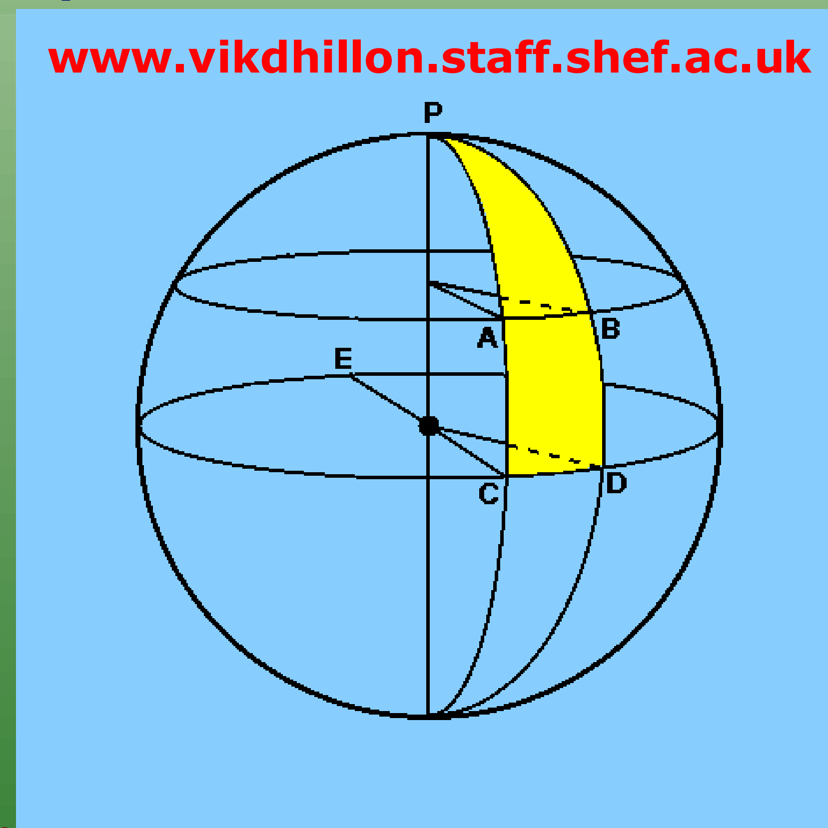
Geometría esférica

Otra geometría posible es la esférica. En ella k>0 y se define de la siguiente manera:

- **Los ángulos de un triángulo suman más de 180º.**
- **La longitud de la circunferencia es menor que $2\pi r$.**

En el caso de k>0 el Universo es finito pero ilimitado. Debido a que es finito, un Universo con k>0 se dice que es un Universo cerrado.





Geometría esférica

Es interesante hacer varias consideraciones:

- **Una esfera parece igual en cualquier dirección, por lo que el principio de isotropía es cierto para esta geometría.**
- **Aunque el Universo tenga geometría esférica, localmente no la distinguiríamos de la Euclídea (la Tierra nos parece plana).**
- **Líneas paralelas en un cierto punto pueden cruzarse en otro (por ejemplo, las líneas de longitud).**
- **La distancia más corta entre dos puntos no es una línea recta, es un círculo mayor como las líneas de longitud o el Ecuador de la Tierra. Hay que hablar de geodésica, que en el caso de k=0 sería una línea recta (salvo curvatura debido a la gravedad).**
- **La curvatura es una propiedad geométrica que no depende de dimensiones extra. En el caso de 2-D, la curvatura es una propiedad que no depende de una tercera dimensión. Esto significa que la curvatura de nuestro espacio 3D no necesita de más dimensiones para tener sentido.**
- **Viviendo en un espacio 3D es fácil entender la curvatura de un espacio 2D, pero nos cuesta entender la curvatura en el espacio 3D.**

Geometría hiperbólica

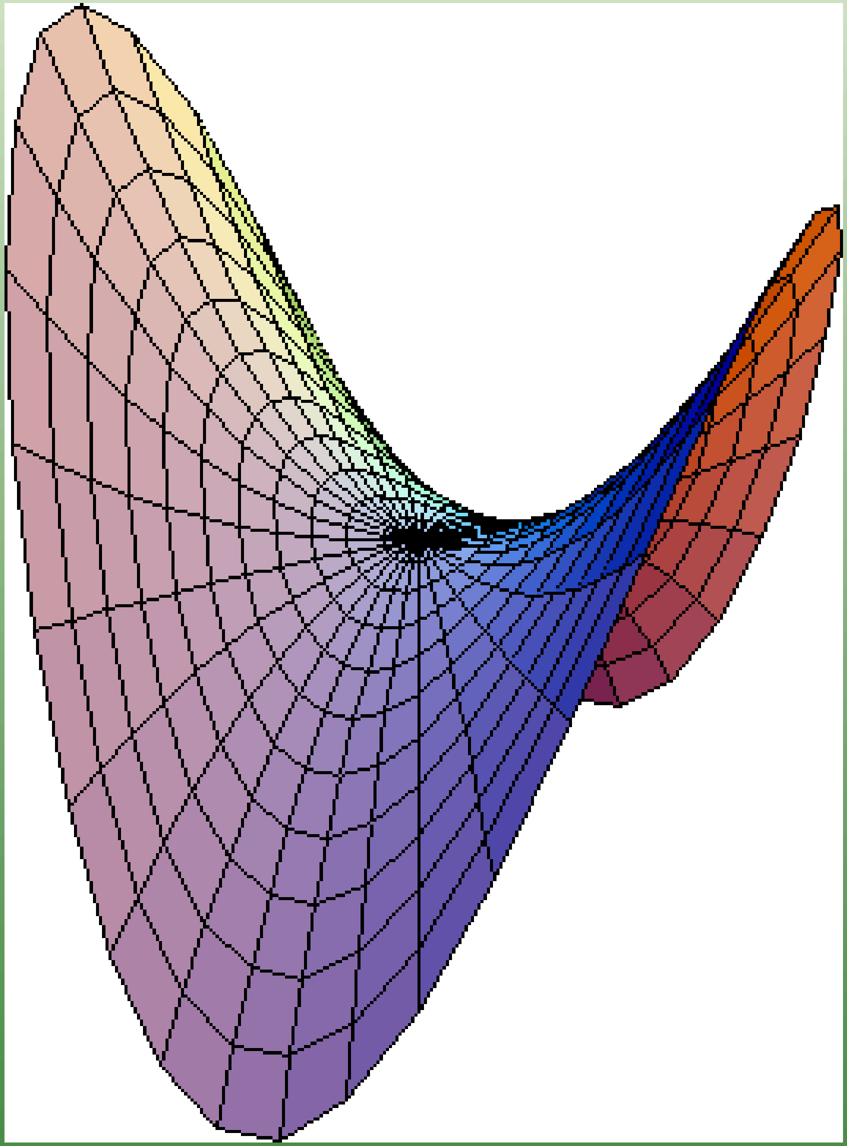
La tercera posibilidad es una geometría con k<0, que se denomina hiperbólica, y en este caso el Universo sería abierto. Esta geometría cumple:

- **Los ángulos de un triángulo suman menos de 180º.**
- **La longitud de la circunferencia es mayor que $2\pi r$.**

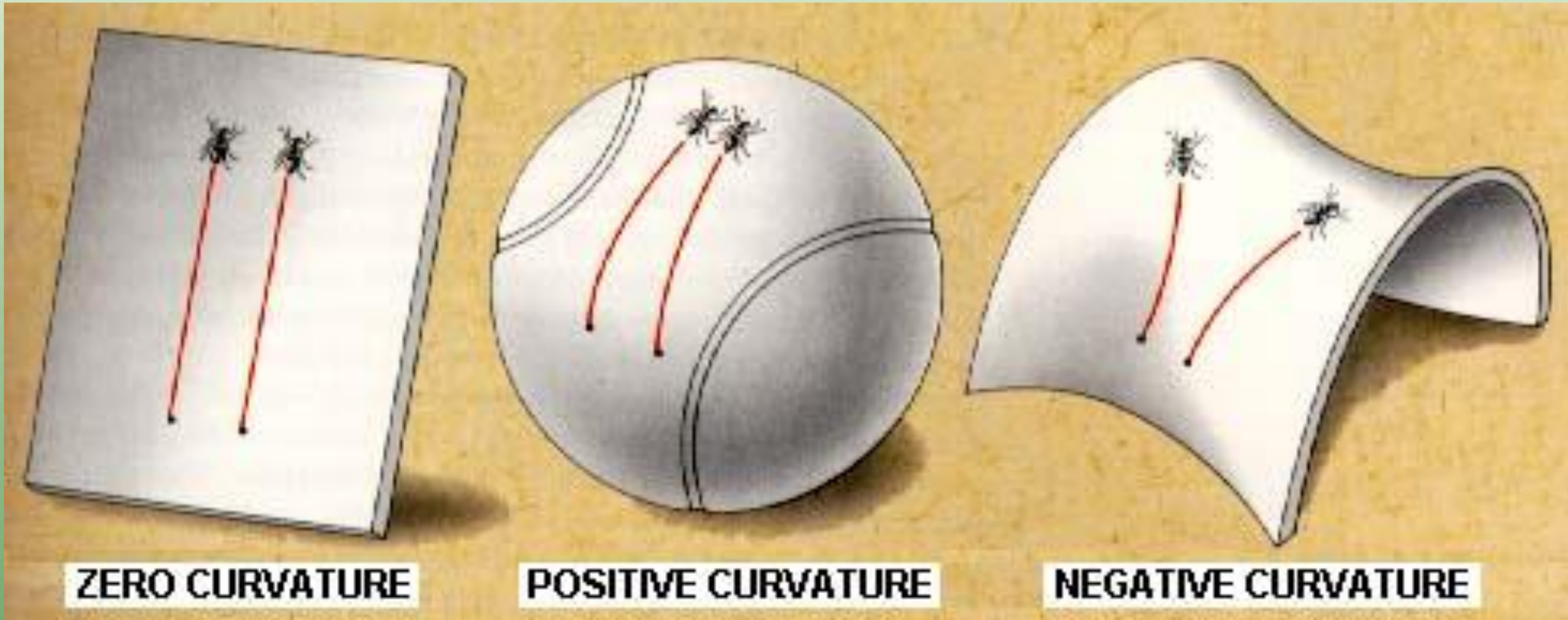
Es una geometría que no resulta muy rara, pero cumple todos los requisitos, como la isotropía.

Líneas paralelas nunca se cruzan, al contrario que la geometría esférica.

Este Universo sería infinito.



Geometría: resumen



http://www.phy.syr.edu/courses/modules/LIGHTCONE/einstein-gr.html

curvatura	geometría	ángulos de un triángulo	longitud de una circunfrencia	tipo de Universo
$k>0$ $k=0$ $k<0$	esférica plana hiperbólica	>180º =180º <180º	$<2\pi r$ $=2\pi r$ $>2\pi r$	cerrado plano abierto

Geometría en la ecuación de Friedmann

Dado que solo hay 3 geometrías posibles, a veces se escribe la ecuación de Friedmann de tal manera que la parte no dependiente de la densidad toma 3 valores diferentes:

$$\left(\frac{\dot{\hat{a}}}{\hat{a}}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \pm \frac{1}{\hat{a}^2}$$

donde se ha tomado:

$$\hat{a} = \frac{a}{\sqrt{|k|}}$$

De tal manera que la parte izquierda de la ecuación no cambia, aunque con esta redefinición el factor de escala no toma el valor 1 en la actualidad, sino que está normalizado a la curvatura, lo que significa que las distancias medidas con este factor de escala no estarían en Mpc sino en unidades de la escala de curvatura.

Con este reescalado las unidades del factor de escala â serían de longitud y k no tendría unidades y solo podría tomar valores -1 o +1 (el caso de k=0 no usa reescalado).

10.3.Parámetros y unidades "cosmológicas"

Basándonos en la Ley de Hubble se puede reescribir la ecuación de Friedmann:

$$v = Hd \Rightarrow H = \frac{v}{d}$$

$$\vec{r} = a\vec{x} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{x} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{x} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da}{dt}\frac{\vec{r}}{a}$$

$$\frac{\vec{v}}{\vec{r}} = \frac{\dot{a}}{a} \equiv H(t)$$

10.3.Parámetros y unidades “cosmológicas”

La ecuación de Friedmann en función del parámetro de Hubble sería:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

donde H es una función del tiempo, H(t), el factor de escala también, a(t), la densidad también, ρ(t), y k es la constante de curvatura. Si consideramos el valor hoy, hablaríamos de H_0, que sabemos que es unos 70 km/s/Mpc.

La constante de Hubble no es tal: es constante en el espacio debido al principio cosmológico, pero no tiene por qué serlo en el tiempo.

La constante de Hubble clásica sería el valor actual del parámetro de Hubble, que podríamos decir que decrece a medida que la expansión del Universo de desacelera por el efecto, por ejemplo, de la atracción gravitatoria.

10.4.Modelos cosmológicos simples

Para resolver la ecuación de Friedmann y la ecuación del fluido, necesitamos una ecuación de estado que nos ligue la densidad y la presión.

Existen dos casos simples en los que se pueden obtener soluciones sencillas de las ecuaciones cosmológicas. Estos casos son:

- **El Universo solo tiene materia, también se habla de que solo tiene *polvo*, o solo *materia no relativista*, de manera que p=0. Esta es una buena aproximación para un Universo con átomos y suficientemente frío (y poco denso) de tal manera que casi no interaccionan. También es una buena aproximación para un Universo con galaxias, que no interaccionan salvo por gravedad. También se podría incluir CDM.**
- **El Universo solo tiene radiación, o partículas que se mueven a la velocidad de la luz (por tanto, partículas sin masa) o a velocidades relativistas (con una masa pequeña, como los neutrinos). Su energía cinética conlleva una cierta presión de radiación que tiene la forma $p=\rho c^2/3$.**
- **Podría existir otro tipo de materia/energía que tiene una presión negativa (?).**

Consideraremos los 2 casos por separado (para un Universo plano, el caso más simple), aunque el Universo podría ser una mezcla en algún momento de su historia.

10.4.Modelo cosmológico solo con materia

$$p = 0$$

La ecuación del fluido:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow$$

$$\ln(\rho) = -3\ln(a) + C$$

$$\boxed{\rho \propto \frac{1}{a^3}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \quad (a_0 = 1!!)}$$

10.4.Modelo cosmológico solo con materia

$$p = 0$$

Resolviendo la ecuación de Friedmann (para k=0):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^3}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{1}{a}$$

10.4. Modelo cosmológico solo con materia

$$p = 0$$

$$\dot{a}^2 = C\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{da}{dt} = C'\frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a}\,da = C'\,dt \Rightarrow$$

$$a^{3/2} = C''t$$

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}}$$

$$\boxed{\rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}}$$

10.4.Modelo cosmológico solo con materia

$$p = 0$$

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}}$$

$$\boxed{\rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}}$$

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}}$$

Este Universo se expandiría para siempre, con una velocidad cada vez menor porque la gravedad va frenándolo, y con una densidad cada vez menor. Nunca llegaría a pararse la expansión o a colapsar de nuevo (porque pusimos k=0!!!).

10.4.Modelo cosmológico solo con radiación

$$p = \rho c^2 / 3$$

La ecuación del fluido:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(1 + \frac{c^2}{3c^2}\right) = -\frac{4\dot{a}}{a}$$

$$ln(\rho) = -4ln(a) + C$$

$$\boxed{\rho \propto \frac{1}{a^4}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{a^4} \ (a_0 = 1!!)}$$

10.4.Modelo cosmológico solo con radiación

$$p = \rho c^2 / 3$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}$$

El Universo todavía se expandiría para siempre, pero más lentamente que en el caso de un Universo dominado por materia.

La densidad decrece como a^4. Una parte de ese factor (a^3) se puede interpretar como el volumen creciente, la otra parta (a) como la disminución de la energía (densidad) por el efecto del desplazamiento al rojo de la radiación (que "pierde energía"). También se interpreta como que la presión realiza un trabajo que se debe restar a la densidad de radiación.

10.4.Modelo cosmológico mixto

$$p_{rad} = \rho_{rad} c^2 / 3$$

$$p_{mat} = 0$$

$$\boxed{\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3}}$$

$$\boxed{\rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4}}$$

$$\boxed{\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}}$$

10.4.Modelo cosmológico mixto

$$p_{rad} = \rho_{rad}\, c^2 / 3 \qquad p_{mat} = 0$$

Podemos considerar los límites:

- **Domina la radiación, es decir, $\rho_{rad} >> \rho_{mat}$:**

$$a(t) \propto t^{1/2}$$

$$\boxed{\rho_{mat} \propto \frac{1}{t^{3/2}}} \quad \textbf{inestable} \quad \boxed{\rho_{rad} \propto \frac{1}{t^{2}}}$$

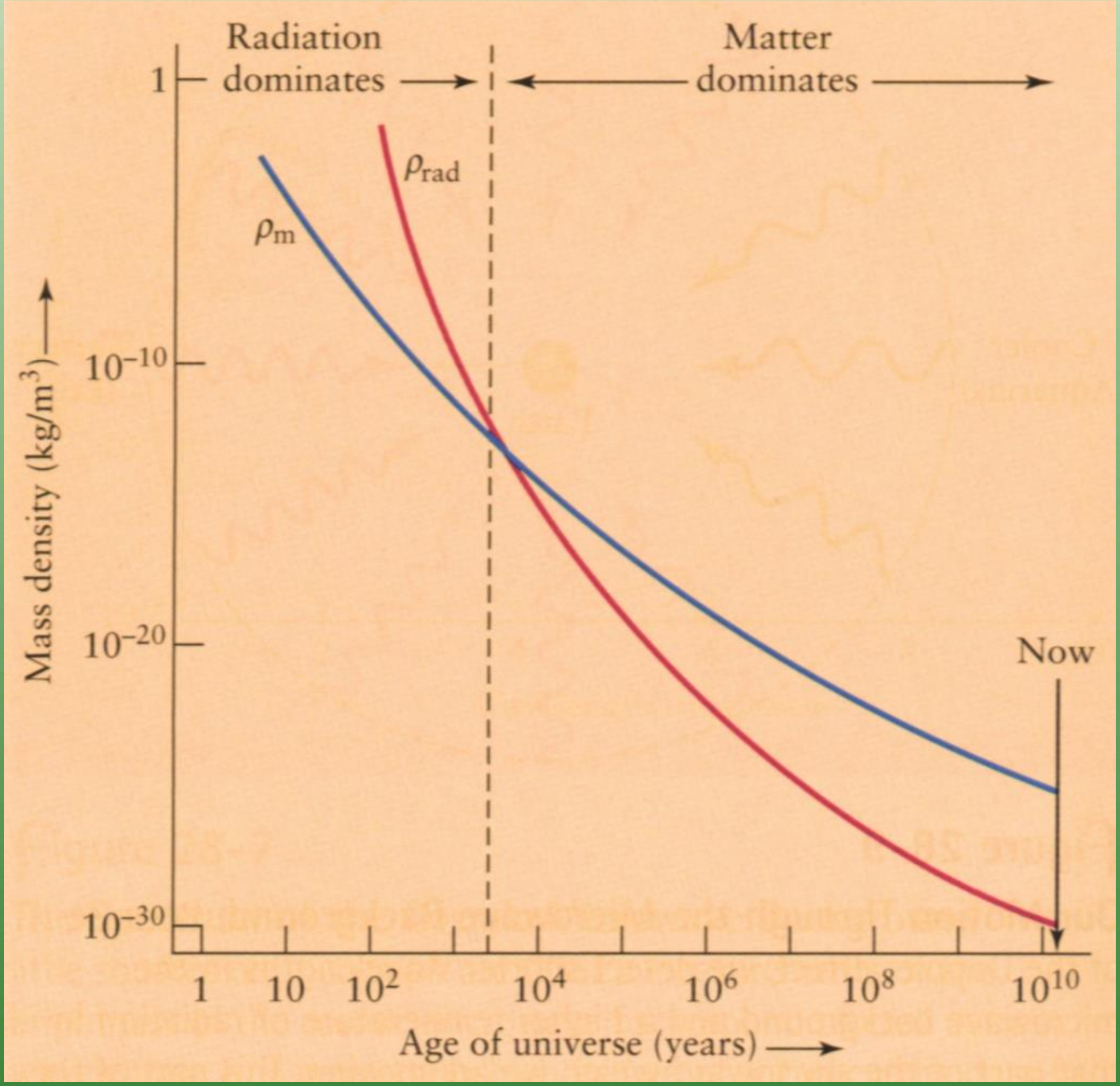
- **Domina la materia, es decir, $\rho_{mat} >> \rho_{rad}$:**

$$a(t) \propto t^{2/3}$$

$$\boxed{\rho_{mat} \propto \frac{1}{t^{2}}} \quad \textbf{estable} \quad \boxed{\rho_{rad} \propto \frac{1}{t^{8/3}}}$$

10.4.Modelo cosmológico mixto

$$p_{rad} = \rho_{rad}\, c^2 / 3 \qquad p_{mat} = 0$$



http://crab0.astr.nthu.edu.tw/~hchang/ga2/ch28-03.htm

10.4. Efecto de la curvatura: ejemplo k>0

Las ecuaciones implicadas:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \qquad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0$$

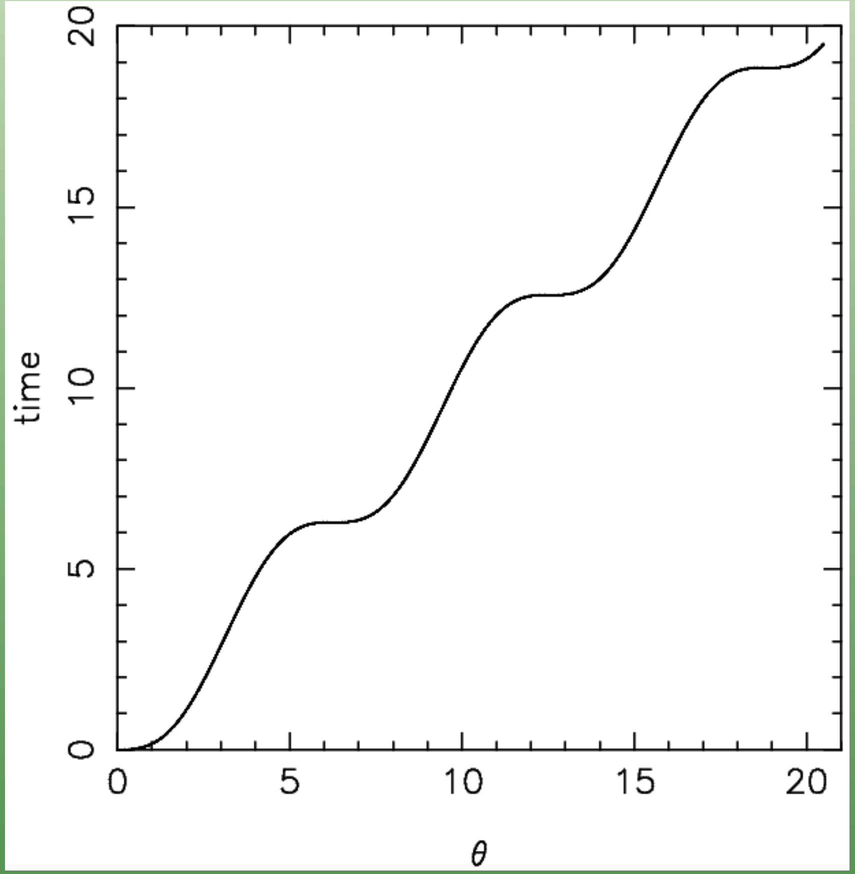
Para un Universo de materia y k>0:

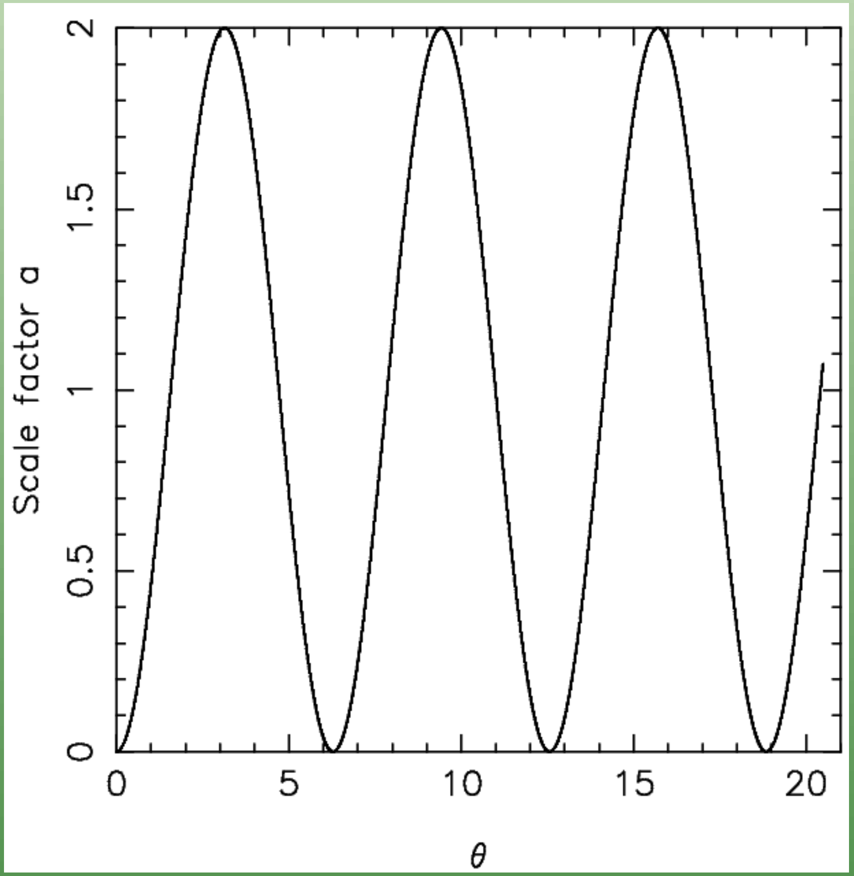
$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$$

$$a(\theta) = \frac{4\pi G\rho_0}{3k}(1-\cos\theta)$$

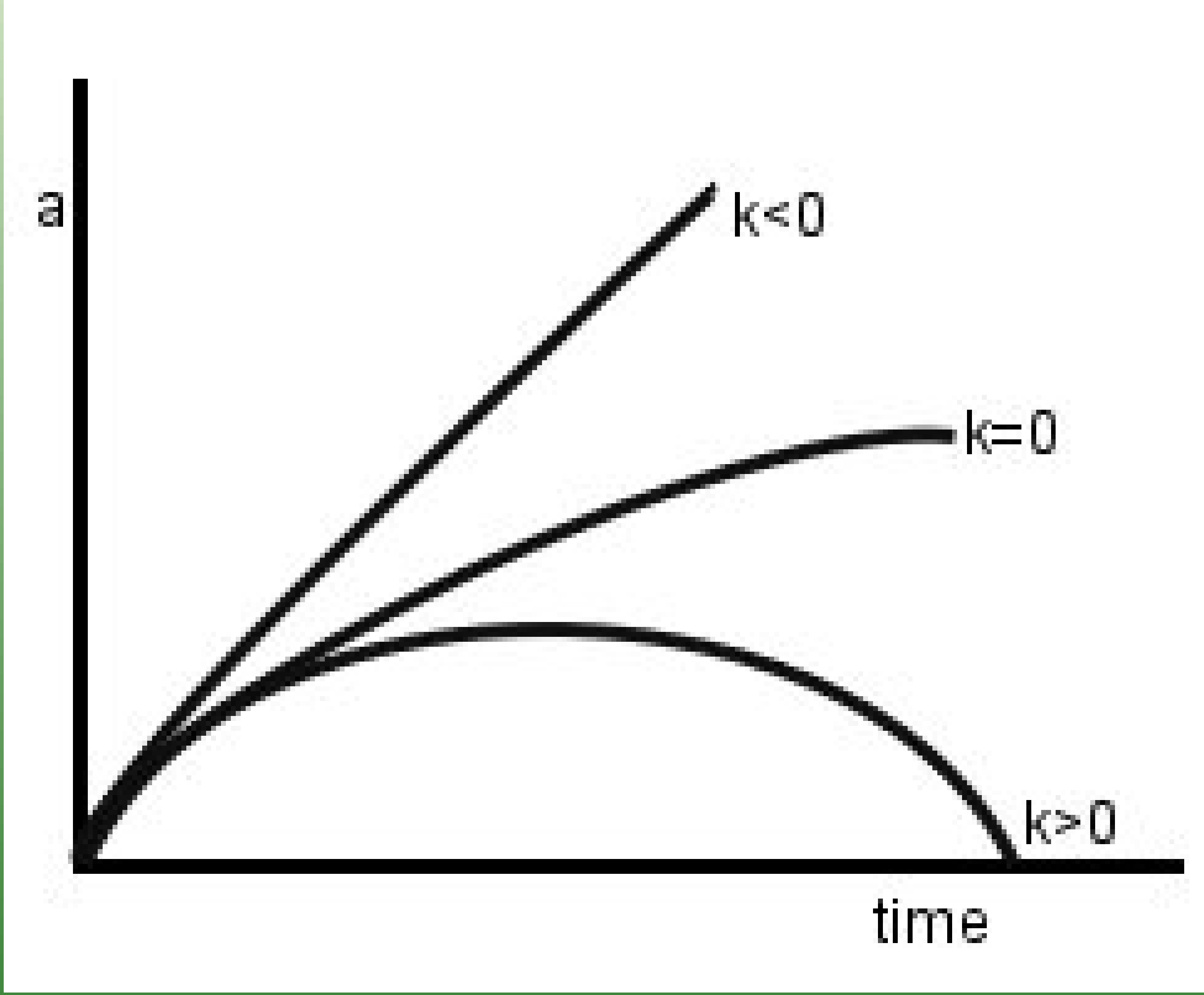
$$t(\theta) = \frac{4\pi G\rho_0}{3k^{3/2}}(\theta-\sin\theta)$$

10.4.Efecto de la curvatura





10.4.Efecto de la curvatura



10.5.Parámetros observacionales

El concepto de redshift en cosmología se obtiene de esta manera, considerando el parámetro de Hubble y que el tiempo que pasa entre dos sucesos es la distancia propia entre ello entre la velocidad de la luz:

$$dv = H dr = \frac{\dot{a}}{a} dr$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{dv}{c}$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{\dot{a}}{a}\frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt \Rightarrow \lambda \propto a$$

En general, considerando un movimiento radial de expansión:

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} \qquad 1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

10.5.Parámetros observacionales

Un modelo cosmológico se representa con un conjunto de unos pocos parámetros que nos permiten obtener una solución de las ecuaciones fundamentales y entender las propiedades del Universo. Entre estos parámetros está, por ejemplo, el ritmo de expansión del Universo o la cantidad de materia.

El primer parámetro observacional: la constante de Hubble.

$$H_0 = 72 \pm 8 \;\; km \; s^{-1} \, Mpc^{-1}$$

$$h_{100} = h \equiv \frac{H_0}{100} \qquad\qquad h_{70} \equiv \frac{H_0}{70}$$

Valores de h *pequeños* equivalen a una expansión más lenta, distancias más grandes y una edad del Universo más grande que valores de h grandes.

Muchas cantidades observacionales se escriben en función del parámetro h, con lo que tienes en cuenta la incertidumbre en la constante de Hubble. Por ejemplo:

$$M_B - 5\log h \qquad\qquad 100\,h^{-1}\,Mpc$$

10.5.Parámetros observacionales

Otro parámetro observacional importante es la densidad crítica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}}$$

En la actualidad (con $h=H_0/100$):

$$\rho_c(t_0) = 1.88\, h^2 \times 10^{-26}\ kg\, m^{-3}$$

$$\rho_c(t_0) = 2.78\, h^{-1} \times 10^{11}\ M_{\odot}/(h^{-1}Mpc)^3$$

10.5.Parámetros observacionales

Otro parámetro observacional importante es el parámetro de densidad Ω, que a veces se escribe Ω_m:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$$

Utilizando este parámetro la ecuación de Friedmann queda:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \Omega - \frac{k}{a^2} = H^2 \Omega - \frac{k}{a^2}$$

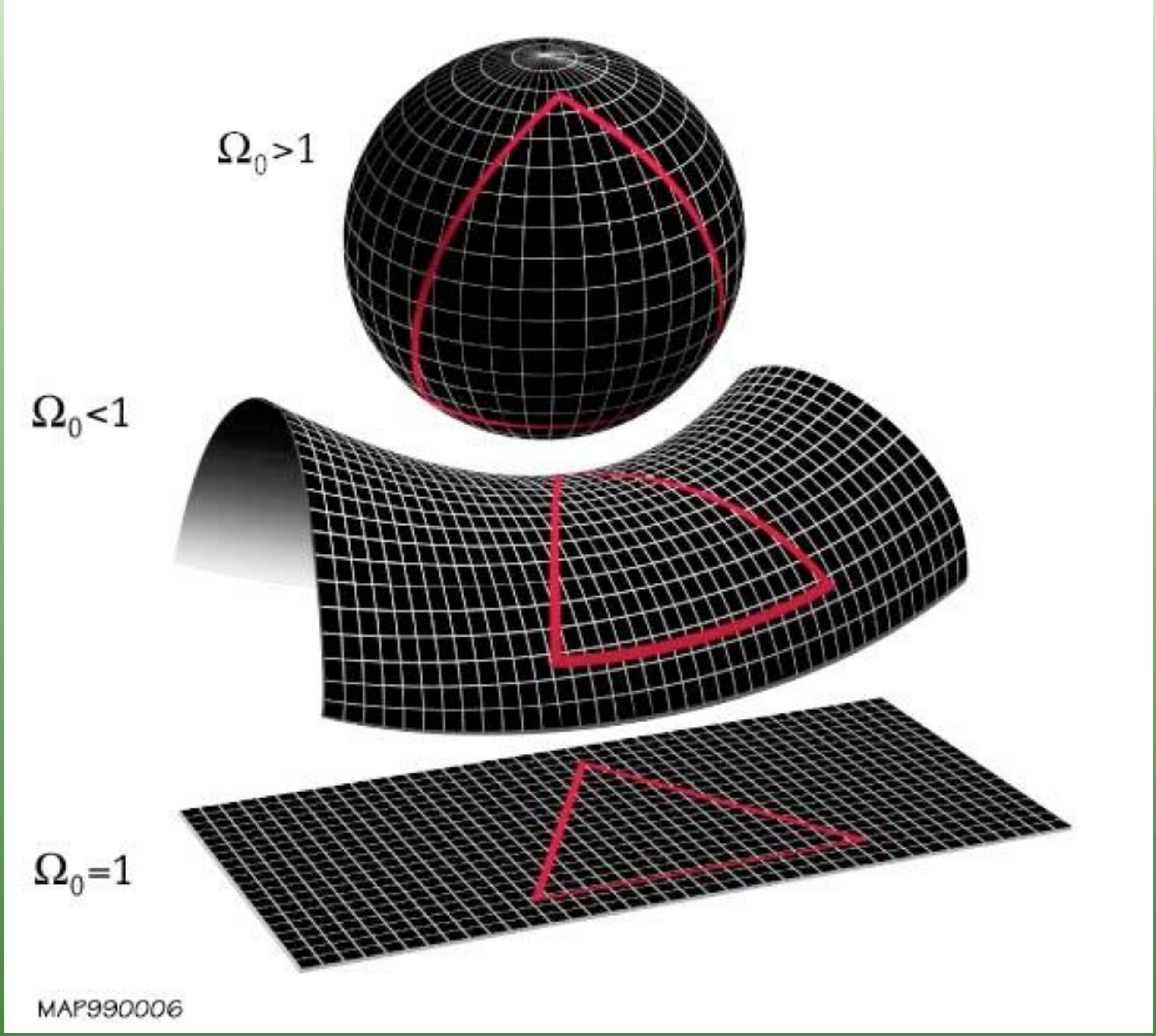
$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}$$

El parámetro de densidad se puede generalizar y hablar de Ω_{mat}, Ω_{rad}, etc..., o incluso un Ω_k, de tal manera que la ecuación de Friedmann queda:

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2} \qquad \Omega + \Omega_k = 1$$

Y se le puede poner un subíndice que nos hable de un tiempo dado, por ejemplo: $\Omega_{mat,0}$.

10.5.Parámetros observacionales



10.5.Parámetros observacionales

Otro parámetro observacional importante es el parámetro de desaceleración.

Considerando un desarrollo en serie de Taylor del factor de escala en torno al presente:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \ldots$$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{1}{2}q_0 H_0^2[t - t_0]^2 + \ldots$$

$$\boxed{q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}\frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}}$$

Para un Universo de materia (comprobadlo!):

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2}$$

Los datos actuales establecen $q_0<0$ (el Universo se acelera!!). De la ecuación de la aceleración se ve que esto sería imposible para cualquiera de los Universos presentados hasta aquí (compuestos y dominados por materia y/o radiación; es decir, debe haber algo más que no hemos tomado en cuenta o que compone el Universo).

Resumen

- **¿Qué se entiende por expansión del Universo?**
- **¿Cómo se representa en Física?**
- **Coordenadas físicas y comóviles.**
- **Ecuaciones que describen el Universo: Friedmann, ecuación del fluido (y ecuación de la aceleración de la expansión), ecuación de estado.**
- **Soluciones sencillas a estas ecuaciones. Universo de materia y de radiación.**
- **Parámetros observacionales: constante y parámetro de Hubble, densidad crítica, parámetros de densidad, parámetro de desaceleración, curvatura.**
- **Versiones de las ecuaciones cosmológicas usando estos parámetros.**
- **Semántica (significado e implicaciones): Universo plano, abierto, cerrado, de materia, de radiación, mixto, en expansión, acelerado, desacelerado,...**