Tema 11: Descripción física del Universo, Cosmología relativista

Consultar: "An Introduction to Modern Cosmology", Liddle, libro entero

"*Galaxies and Cosmology*", Jones & Lambourne, 2007, Cambridge, temas 5-7 (J&L07).

NASA Extragalactic Database (NED) Level 5: http://ned.ipac.caltech.edu.

Ned Wright's Cosmology web pages: http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm.

Objetivos del tema

- **Presentar las ecuaciones cosmológicas teniendo en cuenta la Relatividad General.**
    - **Concepto de energía oscura.**
    - **Distancias.**
    - **La edad del Universo.**
    - **Cosmología de precisión.**

11.1.Cosmología relativista

Las ecuaciones presentadas hasta ahora para describir el Universo se pueden derivar a partir de la Teoría General de la Relatividad. Además, en este contexto, se utiliza también la denominada métrica del espacio-tiempo, que es la *"distancia"* entre 2 eventos en el Universo.

Una métrica general compatible con la Teoría de la Relatividad debería escribirse en función de tensores. Una métrica específica que describe el espacio-tiempo isótropo y homogéneo con una curvatura k (que podría cambiar localmente por efectos de la materia del Universo) es la métrica de Robertson-Walker (RW), también conocida como Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y otras combinaciones (con Lemaître).

La métrica FRW se escribe como (en coordenadas esféricas):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

La métrica evoluciona de acuerdo con la Ecuación de Einstein en función del tensor de energía-momento $T_{\nu\mu}$ y el tensor de Ricci $R_{\nu\mu}$ y el escalar R, que dan la curvatura del Universo:

$$R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu\mu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\nu\mu}$$

11.1.Cosmología relativista

La métrica se puede escribir en notación tensorial con índices contravariantes:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx^i dx^i = g_{ij} dx^i dx^j$$

Donde g_{ij} sería el tensor métrico definido en coordenadas esféricas como:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Se define $dx_i = g_{ij} dx^j$ en función de la componente variante del vector dx, con lo que:

$$ds^2 = dx^i dx_i$$

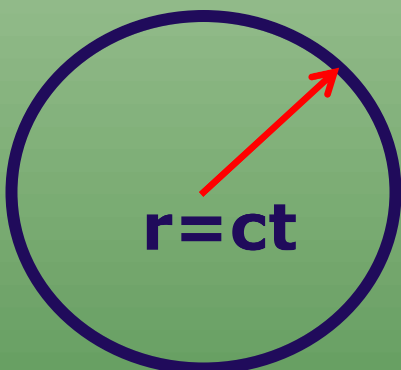
11.1.Cosmología relativista

En el espacio-tiempo tenemos cuatro componentes, que se suelen denotar con subíndices griegos μ o ν. μ =1-4, con μ =4 la coordenada temporal, o μ =0-3 con μ =0 la coordenada temporal.

Utilizaremos la notación μ =0-3, de tal manera que:

$$dx^{\mu} = (cdt, dx^{1}, dx^{2}, dx^{3})$$

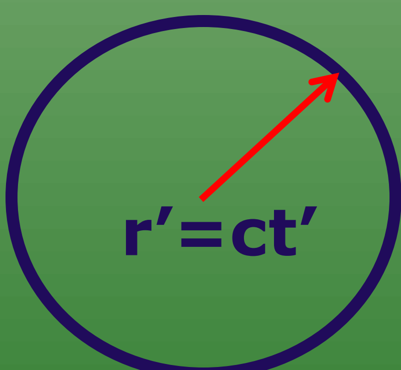
La métrica se define de tal manera que dos observadores ven la luz propagándose a la velocidad de la luz:



Sistema de referencia O v=0

$$c^{2}dt^{2} = dx_{i}dx^{i}$$

$$c^{2}dt^{2} - dx_{i}dx^{i} = 0$$



Sistema de referencia O′ v=v′

$$c^{2}dt'^{2} - dx'_{i}\,dx'^{i} = 0$$

11.1.Cosmología relativista

La separación entre dos eventos en el espacio-tiempo para la luz es nula o invariante, lo que implica que la coordenada temporal de la métrica tiene el signo opuesto que las coordenadas espaciales.

En coordenadas cartesianas:

$$[g_{\upsilon\mu} =]\eta_{\upsilon\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \eta_{\upsilon\mu} dx^\mu dx^\upsilon = -c^2 dt^2 + dx_i dx^i$$

11.1.Cosmología relativista

Según la Relatividad General el Universo está gobernado por la métrica y la ecuación del campo de Einstein:

$$R_{\upsilon\mu} - \frac{1}{2} g_{\upsilon\mu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\upsilon\mu}$$

Para un fluido uniforme e ideal se puede escribir el tensor energía-momento en función de la densidad de energía $\rho c2$, la presión P y la velocidad U:

$$T^{\mu\upsilon} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) U^{\mu} U^{\upsilon} - g^{\upsilon\mu} P$$

Si el fluido es homogéneo e isótropo la densidad y la presión solo dependen del tiempo, no del espacio, y la velocidad se puede escribir como U^{μ}=(c,0,0,0). Con ello el tensor energía momento y su módulo quedan:

$$T_{\upsilon}^{\mu} = diag(\rho c^2, -P, -P, -P) \qquad T = \rho c^2 - 3P$$

11.1.Cosmología relativista

De la ecuación de Einstein aplicada a la métrica de RW se puede sacar la ecuación de Friedmann y una ecuación que combinada con la de Friedmann da la ecuación de la aceleración del factor de escala. De estas dos se puede sacar la ecuación del fluido.

La Relatividad general es un contexto más robusto para describir el Universo, pero las ecuaciones implicadas al final son las mismas expuestas hasta ahora, aparte de la métrica RW, y la constante cosmológica. El conjunto se conoce como modelos de FRW.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 4\pi G\rho - 4\pi G\frac{p}{c^2} - \frac{2kc^2}{a^2} + \Lambda c^2$$

De la ecuación de Friedmann completa (o de la inferior, que es derivada de la de la aceleración) se comprueba que las unidades de [k]=m^{-2} y [Λ]=m^{-2}. A veces se utiliza $\Lambda' = \Lambda c^2$, con [Λ']=s^{-2}.

11.2.La constante cosmológica

La ecuación de Friedmann (ya en unidades naturales), obtenida a través de la Teoría General de la Relatividad, admite la inclusión de una constante Λ (cosmológica):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\Omega + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi G}} \qquad \Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2} \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

En el caso de un Universo plano k=0: $\Omega + \Omega_\Lambda = 1$

Para un Universo abierto k<0: $0 < \Omega + \Omega_\Lambda < 1$

Para un Universo cerrado k>0: $\Omega + \Omega_\Lambda > 1$

11.2.La constante cosmológica

La constante Λ se suele identificar como energía oscura del Universo, una energía del vacío (predicha por teorías de Física cuántica pero con un valor mucho mayor del observado, "el problema de la constante cosmológica"). A veces se confunden términos y se habla de constante cosmológica y de energía del vacío como lo mismo, pero solo es una posible interpretación.

Esa energía oscura se suele tomar como un fluido (igual que la radiación) con una densidad ρ_Λ y presión p_Λ.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \rho_\Lambda\right) - \frac{k}{a^2}$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Este fluido tendría que seguir su propia ecuación del fluido:

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2}\right) = 0$$

Λ es en principio constante (derivada temporal nula), y el Universo se expande (H es positivo), con lo que:

$$\rho_\Lambda = -\frac{p_\Lambda}{c^2} \Rightarrow p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$$

11.2.La constante cosmológica

La energía del vacío, según la Física Cuántica, tiene un valor de unos $E_v \sim 10^{113}$ J/m^3. ¿Cómo se compara esto con la constante cosmológica que se mide en Astrofísica?

En Astrofísica medimos Ω_Λ:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

Ω_Λ no tiene unidades, con lo que, contando que H tiene unidades de s^{-1}, Λ tiene que tener unidades de s^{-2} en unidades naturales, o de m^{-2} cuando se incluye la velocidad de la luz.

Para comparar la energía del vacío con lo que sale en las ecuaciones cosmológicas, consideramos que:

$$\rho_\Lambda = \frac{E_v}{c^2} = 1.11\times 10^{96}\ kg\, m^{-3}$$

Dividiendo por densidad crítica (para h=0.7), 9.21x10^{-27} kg/m^3:

$$\Omega_\Lambda = 10^{122} \quad para \quad cuánticos$$

Pero en Astrofísica medimos (para h=0.7):

$$\Omega_\Lambda = 0.7 \Rightarrow \rho_\Lambda = 6.4\times 10^{-27}\ kg/m^3 \Rightarrow \Lambda \approx 10^{-35}\ s^{-2}\ o\ \Lambda \approx 10^{-52}\ m^{-2}$$

11.2.La constante cosmológica

La constante cosmológica podría no ser tal y en realidad el efecto en la ecuaciones cosmológicas podría ser un efecto transitorio, que puede desaparecer, o variar lentamente. Esto, que supone una generalización del efecto de la constante cosmológica, se conoce como quintaesencia, de modo que se considera que el efecto que hay que tener en cuenta en las ecuaciones del fluido es:

$$p_Q = \omega \rho_Q c^2$$

ω=-1 sería análogo a tener una constante cosmológica. Una expansión acelerada sería posible si ω<-1/3 (para vencer la presión en la ecuación del fluido).

Esto significa que se considera una densidad debida a esta quintaesencia en la ecuación de Friedmann y en la del fluido.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{mat} + \rho_{rad} + \rho_Q\right) - \frac{k}{a^2}$$

$$\dot{\rho}_Q + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_Q + \frac{p_Q}{c^2}\right) = 0$$

11.2.La constante cosmológica

La ecuación de la aceleración quedaría:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

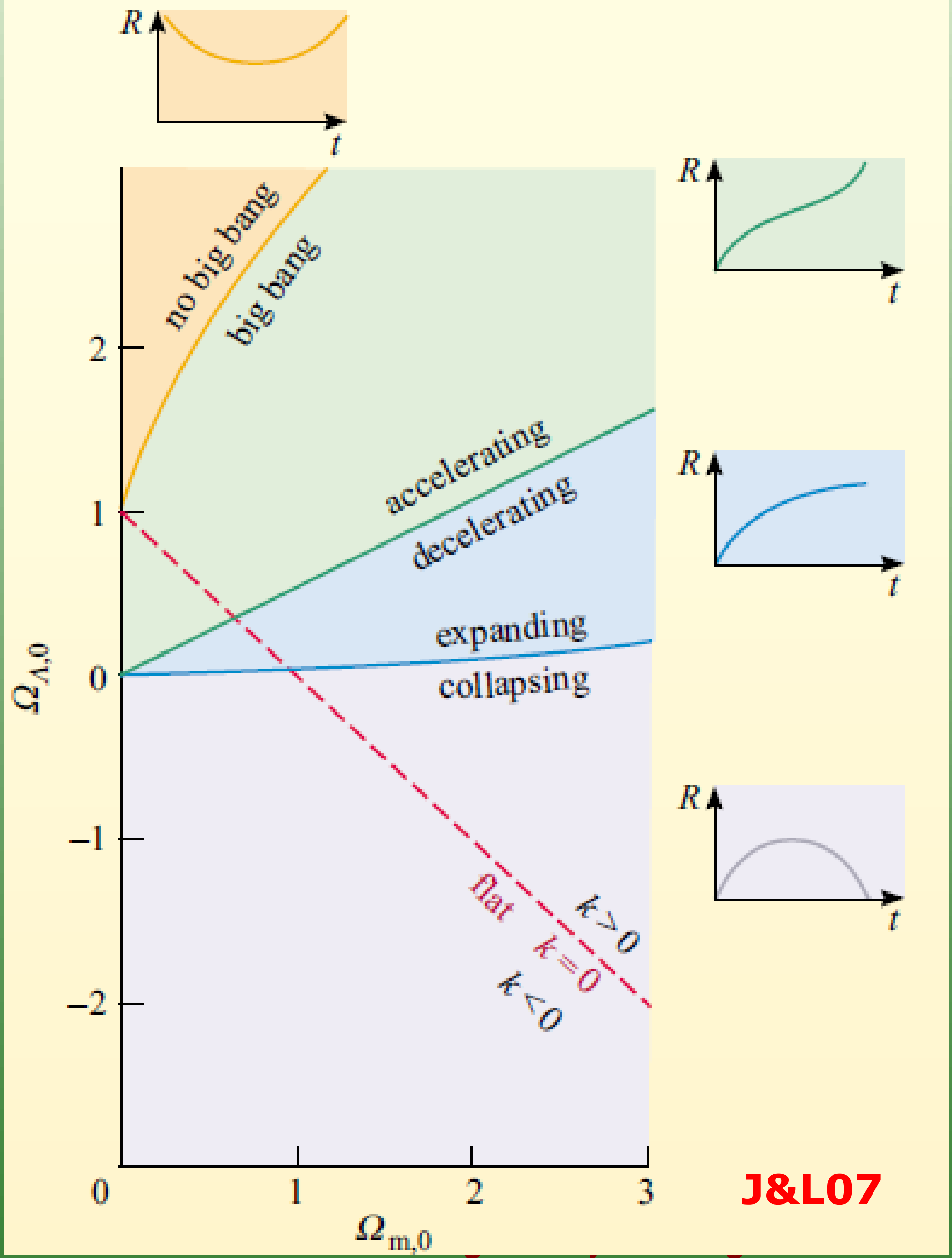
Para un Universo sin presión (dominado por materia), el parámetro de desaceleración sería (en unidades naturales):

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}\frac{1}{H_0^2} = \frac{4\pi G}{3H_0^2}\rho_0 - \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

$$q_0 = \frac{\rho_0}{2\rho_{c,0}} - \frac{\Lambda}{3H_0^2} \Rightarrow q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Omega_{\Lambda,0}$$

¿Qué se tiene que cumplir para $q_0<0$ (aceleración)? ¿Qué pasa si el Universo es plano (k=0) –cómo se simplifica-?

11.2.La constante cosmológica



J&L07

11.2.La constante cosmológica

Ejercicio: evolución de la densidad de "polvo" en un Universo plano y dominado por "polvo".

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\rho/\rho_c}{\rho_0/\rho_{c,0}} \qquad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \qquad \rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\rho/\rho_c}{\rho_0/\rho_{c,0}} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\rho_{c,0}}{\rho_c} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{H_0^2}{H^2}$$

De la ecuación de Friedmann para k=0:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G H_0^2}{3H_0^2}\rho + \frac{\Lambda H_0^2}{3H_0^2} = H_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_{c,0}} + \Omega_{\Lambda,0}\right)$$

Para un Universo de materia:

$$(1+z) = \frac{a_r}{a_e} = \frac{1}{a_e} \qquad \rho = \frac{\rho_0}{a^3} = \rho_0(1+z)^3$$

11.2.La constante cosmológica

Considerando también que:

$$\Omega_0 + \Omega_{\Lambda,0} = 1$$

Obtenemos:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{H_0^2}{H^2} = \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_{c,0}} + \Omega_{\Lambda,0}\right)^{-1} = \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_{c,0}} + 1 - \Omega_0\right)^{-1}$$

Sustituyendo la dependencia con (1+z):

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = (1+z)^3\left(\frac{\rho_0(1+z)^3}{\rho_{c,0}} + 1 - \Omega_0\right)^{-1}$$

$$\Omega = \Omega_0 \frac{(1+z)^3}{\Omega_0(1+z)^3 + 1 - \Omega_0}$$

11.2.La constante cosmológica

Mismo ejercicio, de otra manera:

$$(1+z)=\frac{a_r}{a_e}=\frac{1}{a_e} \qquad \rho=\frac{\rho_0}{a^3}=\rho_0(1+z)^3$$

Intentando expresar todo en función de Ω's:

$$\frac{\rho}{\rho_c}=\frac{\rho_0}{\rho_c}\frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,0}}(1+z)^3 \Rightarrow \Omega=\Omega_0\frac{\rho_{c,0}}{\rho_c}(1+z)^3$$

El cociente de densidades de la parte derecha es:

$$\frac{\rho_{c,0}}{\rho_c}=\frac{3H_0^2}{8\pi G}\Big/\frac{3H^2}{8\pi G}=\frac{H_0^2}{H^2}=\left(\frac{\rho}{\rho_{c,0}}+\Omega_{\Lambda,0}\right)^{-1}=\left(\frac{\rho}{\rho_{c,0}}+1-\Omega_0\right)^{-1}$$

Finalmente:

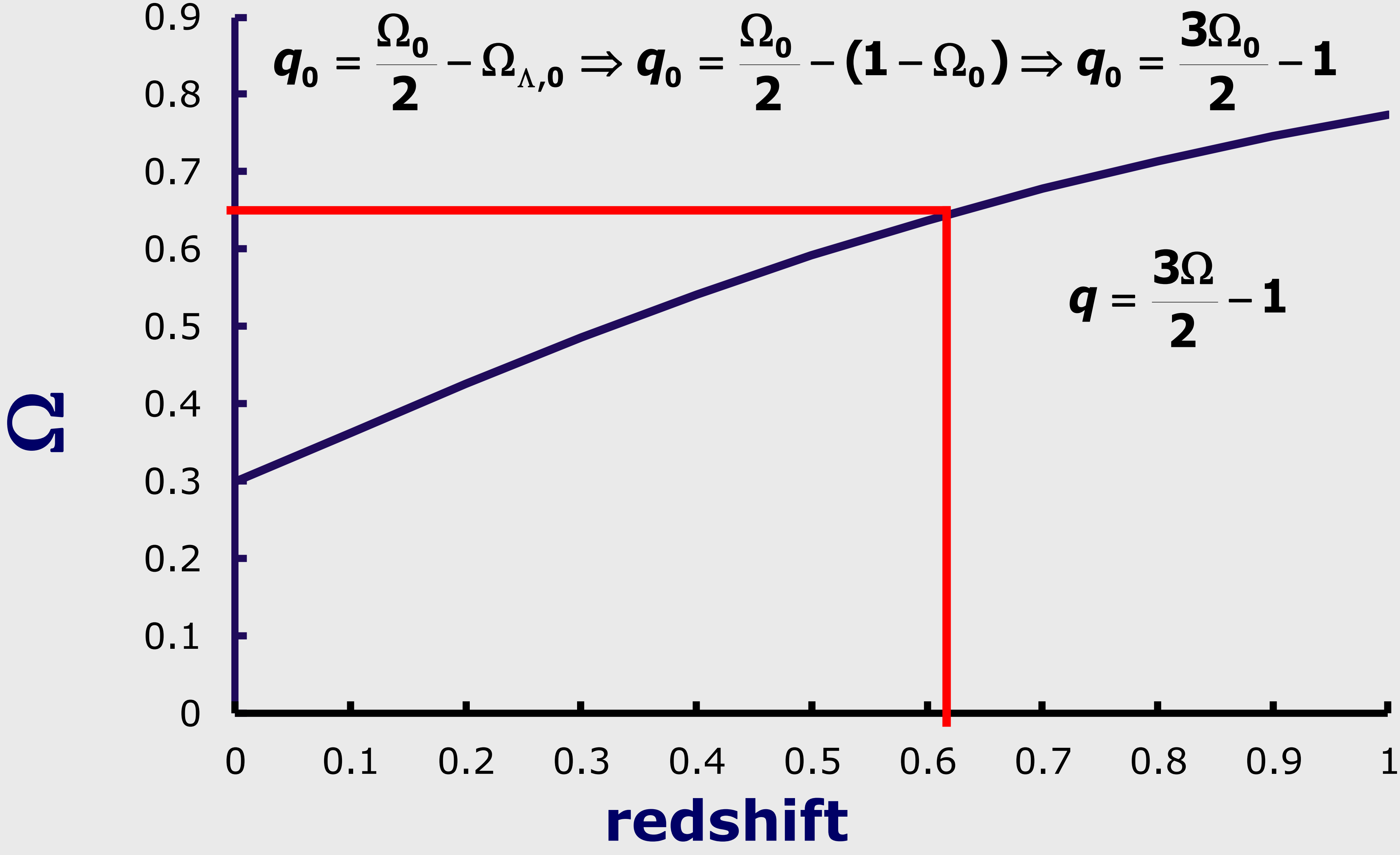
$$\Omega=\frac{\Omega_0(1+z)^3}{\dfrac{\rho_0(1+z)^3}{\rho_{c,0}}+1-\Omega_0} \qquad \Omega=\Omega_0\frac{(1+z)^3}{\Omega_0(1+z)^3+1-\Omega_0}$$

11.2.La constante cosmológica

¿Cuándo empezó el Universo a acelerarse si Ω_0=0.3, es plano y está dominado por materia?

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Omega_{\Lambda,0} \Rightarrow q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - (1 - \Omega_0) \Rightarrow q_0 = \frac{3\Omega_0}{2} - 1$$

$$q = \frac{3\Omega}{2} - 1$$



11.2.La constante cosmológica

Una ecuación muy útil es aquella que liga todas los parámetros de densidad. Considerando cómo varían cada una de las densidades, si el Universo solo tuviera la componente material/energética correspondiente:

$$\rho_{mat} = \frac{\rho_{mat,0}}{a^3} \qquad \rho_{rad} = \frac{\rho_{rad,0}}{a^4} \qquad \rho_Q = \frac{\rho_{Q,0}}{a^{3\gamma}}$$

donde se ha tomado en cuenta una ecuación de estado para la quintaesencia del tipo $p=(\gamma-1)\rho c^2$ con $0<\gamma<2$ (que incluso podría ser variable!!!). Si $\gamma=0$ hablamos de constante cosmológica y no se cumple la ecuación de arriba, sino ρ_Λ=CTE.

En función del redshift:

$$\rho_{mat} = \rho_{mat,0}(1+z)^3$$

$$\rho_{rad} = \rho_{rad,0}(1+z)^4$$

$$\rho_Q = \rho_{Q,0}(1+z)^{3\gamma} \qquad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} = CTE$$

11.2.La constante cosmológica

La ecuación de Friedmann quedaría:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{mat} + \rho_{rad} + \rho_\Lambda\right) - \frac{k}{a^2}$$

Sustituyendo las expresiones de las densidad en función del redshift:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{mat,0}(1+z)^3 + \rho_{rad,0}(1+z)^4 + \rho_{\Lambda,0}\right) - k(1+z)^2$$

Introduciendo la densidad crítica a z=0 $\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

$$H^2 = H_0^2\left(\Omega_{mat,0}(1+z)^3 + \Omega_{rad,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0}\right) - k(1+z)^2$$

Reorganizando:

$$H = H_0(1+z)\left(\Omega_{mat,0}(1+z) + \Omega_{rad,0}(1+z)^2 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2} - \frac{k}{H_0^2}\right)^{1/2}$$

$$H(t) = H_0\left(\Omega_{mat,0}a^{-3}(t) + \Omega_{rad,0}a^{-4}(t) + \Omega_{\Lambda,0} - \frac{k}{H_0^2}a^{-2}(t)\right)^{1/2}$$

11.2.La constante cosmológica

Considerando que la curvatura es constante y se puede escribir en función de los parámetros de densidad a $t=t_0$.

$$H^2\left[1-\left(\Omega_{mat}+\Omega_{rad}+\Omega_{\Lambda}\right)\right]=-\frac{k}{a^2}$$

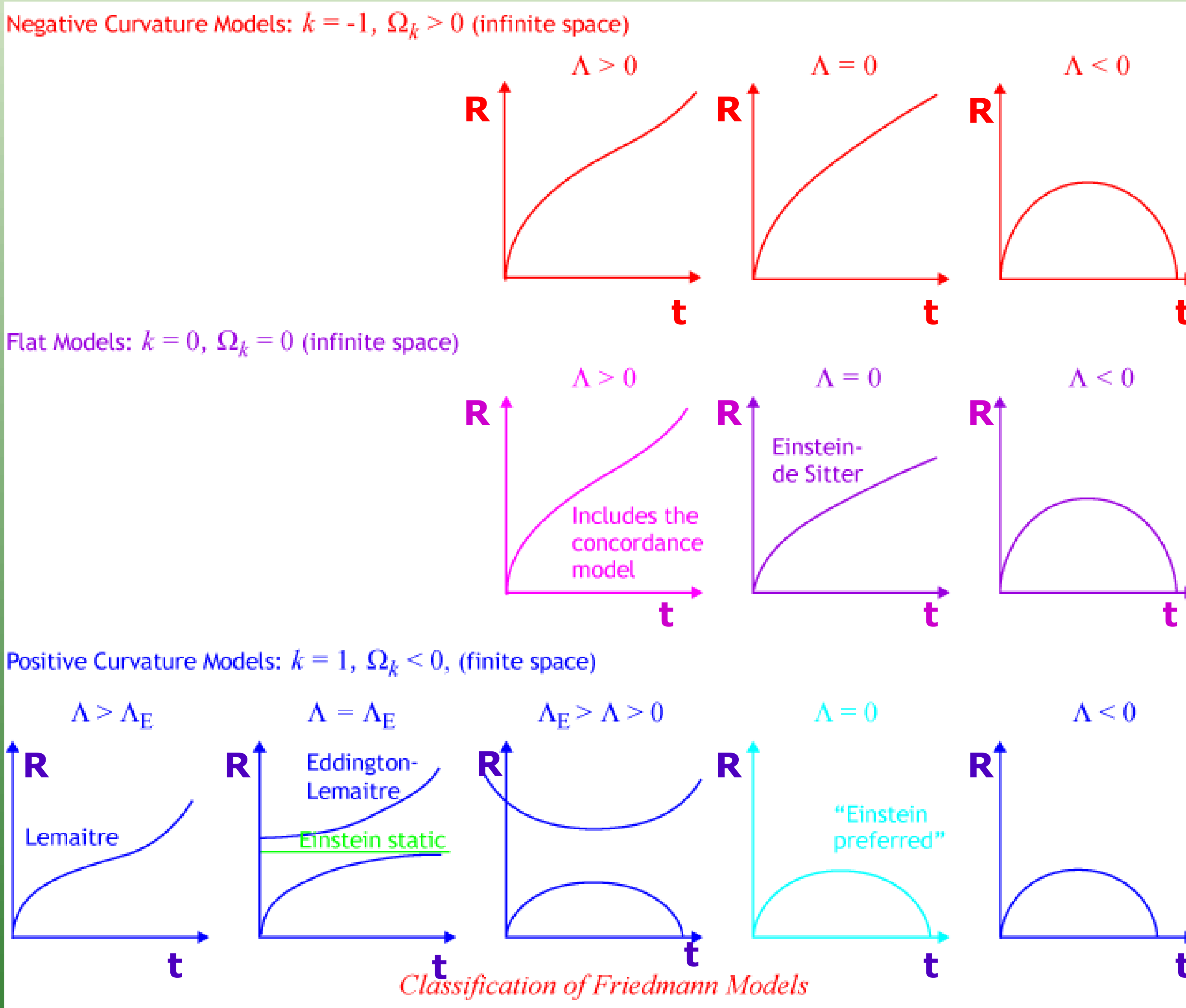
$$H_0^2\left[1-\left(\Omega_{mat,0}+\Omega_{rad,0}+\Omega_{\Lambda,0}\right)\right]=-\frac{k}{a_0^2}=-k$$

Se llega a:

$$H=H_0\left(\Omega_{m,0}a^{-3}+\Omega_{r,0}a^{-4}+\Omega_{\Lambda,0}-\left[1-\left(\Omega_{m,0}+\Omega_{r,0}+\Omega_{\Lambda,0}\right)\right]a^{-2}\right)^{1/2}$$

Esta expresión se podría poner en función del redshift utilizando $(1+z)=a^{-1}$.

Modelos específicos



Classification of Friedmann Models

http://rqgravity.net/LargeScaleStructure

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

La luz no recorre ninguna distancia en el espacio-tiempo, es decir $ds^2=0$. Esto se conoce como una geodésica nula.

Si consideramos un fotón proveniente de una galaxia lejana debemos tratar solo con la coordenada radial de la métrica. Con esto:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} = 0$$

$$\frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

La parte izquierda de la ecuación sería la distancia comóvil recorrida por un rayo de luz, ya que recordamos que:

distancia física (propia)=factor de escala x distancia comóvil

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Consideramos el tiempo transcurrido desde que un rayo de luz es emitido a t_e desde una galaxia lejana es recibido por nosotros t_r, tiempo en el que recorre una distancia r_0 (entre r=0 y $r=r_0$):

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Si consideramos un pulso de luz emitido poco después de uno anterior, podemos escribir una ecuación análoga a la anterior para este pulso, emitido en t_e+dt_e y recibido en t_r+dt_r. Hay que considerar que la posición de la galaxia no ha cambiado porque está fija en coordenadas comóviles!!!

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Igualando con la expresión de arriba:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_r} \frac{cdt}{a(t)}$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Desarrollando un poco el término de la izquierda de la ecuación:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a(t)} = -\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)} +$$

$$\left[\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_e+dt_e}^{t_r} \frac{cdt}{a(t)}\right] +$$

$$\int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a(t)}$$

El término entre paréntesis es la integral entre t_e y t_r, que se va con la parte derecha de la ecuación original, con lo que:

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a(t)}$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Para un intervalo de tiempo infinitesimal las integrales se pueden escribir como:

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_r}{a(t_r)}$$

En un Universo en expansión $a(t_r)>a(t_e)$, lo que implica $dt_r>dt_e$. Es decir, el intervalo de tiempo que pasa entre los dos rayos se incrementa a medida que crece el tiempo.

Si consideramos que el intervalo de tiempo es el que pasa entre dos crestas de la onda electromagnética obtenemos, teniendo en cuenta que la longitud de onda es proporcional al tiempo ($\lambda \sim 1/\nu = T$):

$$\frac{a(t_r)}{a(t_e)} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e}$$

Si consideramos que el momento de recepción es el actual $t_r=t_0$, y:

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} \equiv 1+z \qquad \frac{1}{a} = 1+z$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Como ejemplo: observamos un QSO a z=2. ¿A qué redshift estaría para un alienígena a z=1? (George Djorgovski)

$$1+z=\frac{a(t_{obs})}{a(t_e)} \left\{ \begin{array}{l} 1+z_{QSO,earth}=\dfrac{a(t_{earth})}{a(t_{QSO})} \\ \\ 1+z_{QSO,alien}=\dfrac{a(t_{alien})}{a(t_{QSO})} \end{array} \right.$$

$$1+z_{alien}=\frac{a(t_{earth})}{a(t_{alien})}$$

$$1+z_{QSO,alien}=\frac{a(t_{alien})}{a(t_{QSO})}=\frac{a(t_{earth})}{a(t_{QSO})}\frac{a(t_{alien})}{a(t_{earth})}$$

$$\boxed{1+z_{QSO,alien}=\frac{1+z_{QSO,earth}}{1+z_{alien}} \Rightarrow z_{QSO,alien}=0.5}$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

En Cosmología se definen varias tipos de distancia.

La primera, y quizás más importante, es la distancia de luminosidad. Es aquella que debe aplicarse para determinar la luminosidad de un objeto a partir de su flujo. Considerando la energía radiada por unidad de tiempo y de ángulo sólido L, y la densidad de flujo o energía recibida por unidad de área y tiempo S:

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{4\pi S}$$

Si viviéramos en un Universo estático $d_L=a_0r_0$, pero a=a(t). Esto provoca dos efectos:

- **los fotones individuales pierden energía proporcionalmente a (1+z)**
- **Los fotones llegan con una menor frecuencia, de nuevo como (1+z)**

Combinando los dos efectos, el flujo que nos llega de una fuente es:

$$S = \frac{L}{4\pi a_0^2 r_0^2 (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi \left[a_0 r_0 (1+z)\right]^2}$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

La distancia de luminosidad sería entonces:

$$d_L = a_0 r_0 (1+z)$$

Para el Universo cercano la distancia de luminosidad es parecida a la distancia comóvil r_0, pero para valores de redshift relativamente altos z~0.2 los objetos tienen un flujo menor que el esperado debido al efecto de la expansión del Universo.

En general la distancia de luminosidad se calcularía de la siguiente manera:

$$H = H_0\left(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} - \left[1-\left(\Omega_{m,0}+\Omega_{r,0}+\Omega_{\Lambda,0}\right)\right]a^{-2}\right)^{1/2}$$

Considerando la relación entre z y a(t), que vivimos en un Universo en que la radiación es despreciable, y que la suma de Ω da 1:

$$H = H_0\left[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}\right]^{1/2}$$

$$(1+z) = a^{-1} \Rightarrow dz = -\frac{da}{a^2} = -(1+z)^2 da$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{{}^{dz}\!/\!{}_{dt}\,(1+z)}{(1+z)^2} = \frac{1}{(1+z)}\frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{H(z)} = (1+z)dt = \frac{dt}{a}$$

11.3. Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Volviendo a la geodésica nula:

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

La parte izquierda queda como:

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_0^{z} c\,\frac{dz}{H(z)}$$

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_0^{z} \frac{c}{H_0} \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z')^3 + \Omega_{k,0}(1+z')^2 + \Omega_{\Lambda,0}}}$$

$$\boxed{\int_{t_e}^{t_r} \frac{c\,dt}{a(t)} = D_H \int_0^{z} \frac{dz'}{E(z')} \equiv D_C} \qquad \boxed{D_H = \frac{c}{H_0}}$$

Esta es la distancia comóvil D_C recorrida por un rayo de luz moviéndose hacia nosotros en dirección radial. Es la distancia que se debe usar para discutir aspectos de la LSS que siguen el flujo de Hubble, es decir, la distancia entre murallas de la LSS. Depende de la distancia de Hubble D_H. Tiene expresión analítica para $\Omega_{\Lambda,0}$=0.

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Otra distancia importante sería la distancia comóvil transversal D_M, que a veces se denomina "propia" o "de movimiento propio" (pero es lioso) y es la distancia comóvil entre dos eventos al mismo redshift pero separados en el cielo un ángulo θ. En un espacio Euclídeo (k=0) esta distancia es igual a D_C, pero en un espacio curvo esto ya no es verdad. Habría que integrar la parte derecha de la ecuación de un rayo de luz (que da un arcsin o un arcsinh, según la curvatura sea positiva o negativa). Esto nos daría (Hogg 1999):

$$\boxed{D_M(z) = \begin{cases} D_H \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_k}\,\frac{D_c(z)}{D_H}\right) & para\ \Omega_K > 0 \\ D_C(z) & para\ \Omega_K = 0 \\ D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin\left(\sqrt{|\Omega_k|}\,\frac{D_c(z)}{D_H}\right) & para\ \Omega_K < 0 \end{cases}}$$

Esta distancia sería la adecuada para calcular velocidades de los jets de un radio-loud QSO a partir del movimiento de los nódulos de materia. El motivo sería que la distancia recorrida debería estimarse contando que parte de la separación entre posiciones puede ser debida a la expansión del Universo. Como ésta no debe tenerse en cuenta para medir la velocidad del material hay que utilizar distancias comóviles, no propias.

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Demostramos cómo se calcula $D_M(z)$ para Universo cerrado:

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Cambio de variable y considerando $\Omega_{k,0}<0$:

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2H^2} \Rightarrow k = -\frac{\Omega_k a^2 H^2}{c^2} = -\frac{\Omega_{k,0} H_0^2}{c^2}$$

$$x = \sqrt{k}r = \sqrt{|\Omega_{k,0}|}\, {H_0}/{c}\, r \Rightarrow dx = {\sqrt{|\Omega_{k,0}|}}/{D_H}\, dr$$

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}D_H} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}/D_H} \left[\arcsin(x)\right]_0^{x_0}$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}/D_H} \arcsin\left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|}/D_H \, r_0 \right)$$

Igualando a la parte derecha de la ecuación de un rayo de luz, que es $D_C(z)$:

$$D_C(z) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}/D_H} \arcsin\left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|}/D_H \, r_0 \right) \Rightarrow$$

$$D_M(z) \equiv r_0 = \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin\left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \frac{D_C(z)}{D_H} \right)$$

De igual manera se puede hacer para el caso de k=0 y k<0.

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

La distancia de diámetro angular D_A sería la distancia propia correspondiente a la distancia comóvil transversal. Por tanto:

$$D_A(z) = \frac{D_M(z)}{1+z}$$

Esta es la distancia adecuada para calcular el tamaño real (físico) de una galaxia a partir de su tamaño angular en el cielo.

$$T = \theta(rad) \times D_A$$

Su comportamiento con z es muy interesante.

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

La distancia de luminosidad D_L sería:

$$D_L(z) = (1+z)D_M(z) = (1+z)^2 D_A(z)$$

Cuando se utilizan luminosidades monocromáticas hay que tener en cuenta la corrección K. Recordando:

$$L_\upsilon^e d\upsilon_e = L_\upsilon^o d\upsilon_o$$

$$\lambda_o = (1+z)\lambda_e \Rightarrow \upsilon_o = \frac{\upsilon_e}{(1+z)} \Rightarrow d\upsilon_o = \frac{d\upsilon_e}{(1+z)}$$

$$L_\upsilon^e = L_\upsilon^o \frac{d\upsilon_o}{d\upsilon_e} = \frac{L_\upsilon^o}{(1+z)}$$

$$S_\upsilon^o = (1+z)\frac{L_\upsilon^e}{4\pi D_L^2} = (1+z)\frac{L_\upsilon^e}{L_\upsilon^o}\frac{L_\upsilon^o}{4\pi D_L^2} \Rightarrow$$

$$S_\upsilon^o = (1+z)\frac{L_{\upsilon_o(1+z)}^e}{L_\upsilon^o}\frac{L_\upsilon^o}{4\pi D_L^2}$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

De igual manera que se definen distancias comóviles, se pueden definir volúmenes comóviles, que serían los adecuados para estudiar LFs, dado que se pretende estudiar las propiedades de las poblaciones de galaxias y su evolución librándonos del efecto de la expansión del Universo.

El volumen comóvil se definiría como el adecuado para que una población de galaxias que no evoluciona y que sigue el flujo de Hubble sea constante. Sería el volumen propio o físico dividido por a^3, o multiplicado por $(1+z)^3$.

$$dV_C = D_H \frac{(1+z)^2 D_A^2}{E(z)} d\Omega \, dz$$

$$V_C = \begin{cases} \left(\frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_K}\right)\left[\frac{D_M}{D_H}\sqrt{1+\Omega_K \frac{D_M^2}{D_H^2}} - \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \operatorname{arcsin} h\left(\sqrt{\Omega_k}\frac{D_M}{D_H}\right)\right] & para\ \Omega_K > 0 \\ \left(\frac{4\pi D_M^3}{3}\right) & para\ \Omega_K = 0 \\ \left(\frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_K}\right)\left[\frac{D_M}{D_H}\sqrt{1+\Omega_K \frac{D_M^2}{D_H^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \arcsin\left(\sqrt{|\Omega_k|}\frac{D_M}{D_H}\right)\right] & para\ \Omega_K < 0 \end{cases}$$

11.3.Geodésicas. Distancias en Cosmología.

Para calcular distancias hay que usar la ecuación de un rayo de luz, integrarla (numéricamente?) y conocer 3 parámetros : (H_0,$\Omega_{m,0}$,$\Omega_{\Lambda,0}$)

- **Distancia de Hubble D_H:** $$D_H = \frac{c}{H_0}$$
- **Distancia comóvil D_C:**

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}$$

$$D_C = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \equiv D_C$$

- **Distancia comóvil transversal (propio o de movimiento propio):**

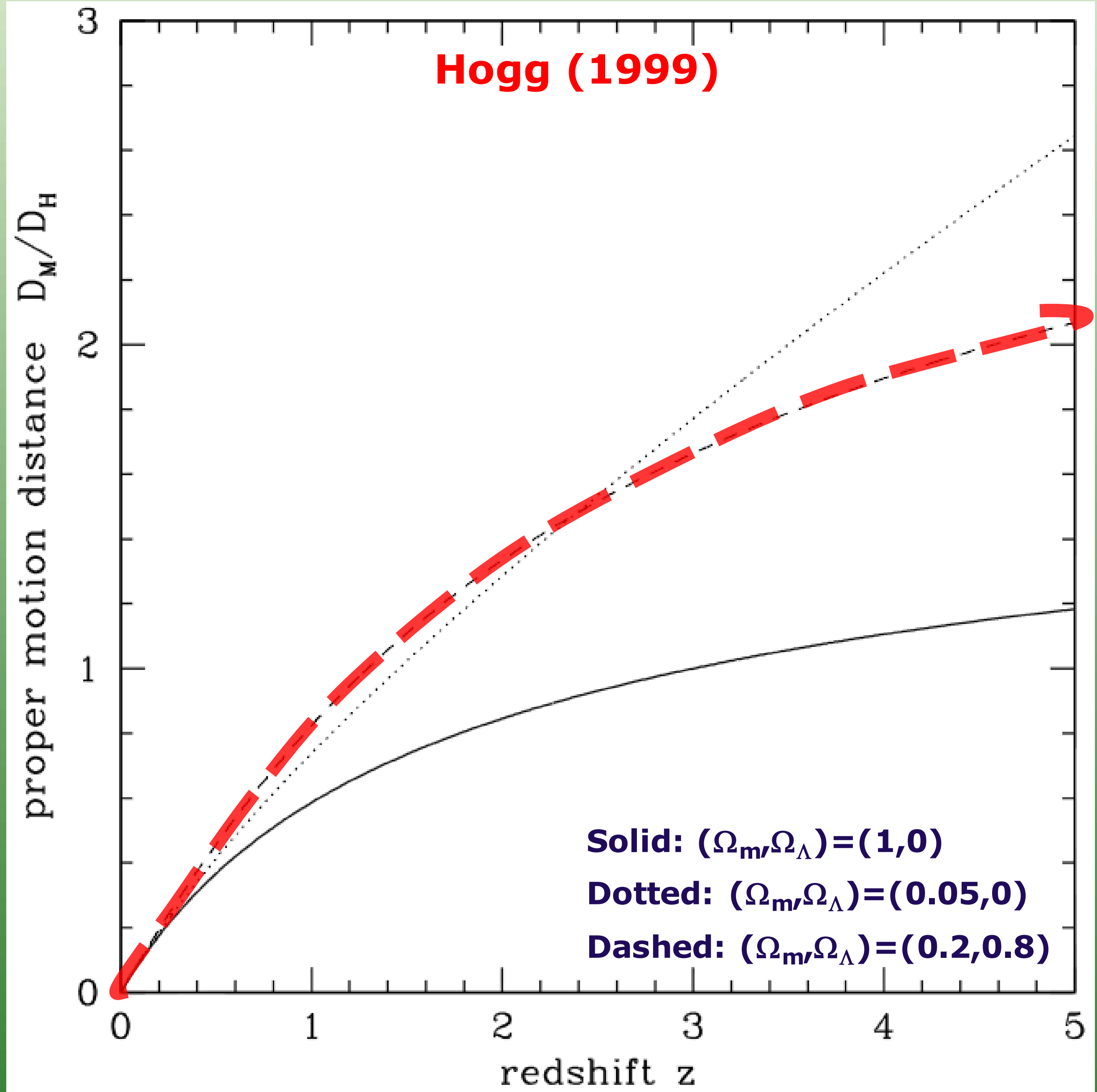
$$D_M(z) = \begin{cases} D_H \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_k}\, \frac{D_c(z)}{D_H}\right) & para\ \Omega_K > 0 \\ D_C(z) & para\ \Omega_K = 0 \\ D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin\left(\sqrt{|\Omega_k|}\, \frac{D_c(z)}{D_H}\right) & para\ \Omega_K < 0 \end{cases}$$

- **Distancia de diámetro angular:** $$D_A(z) = \frac{D_M(z)}{1+z}$$

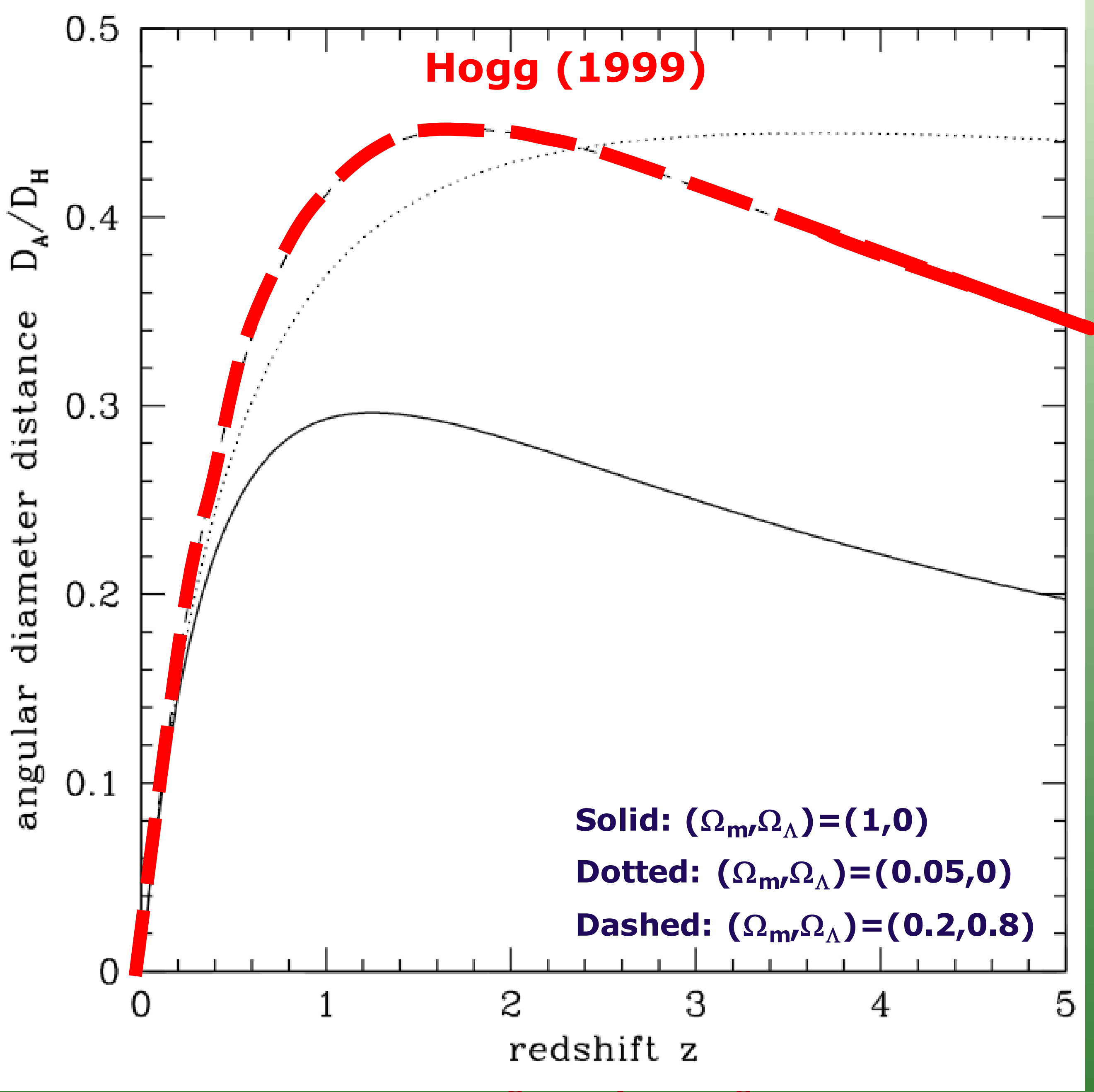
- **Distancia de luminosidad:**

$$D_L(z) = (1+z)D_M(z) = (1+z)^2 D_A(z)$$

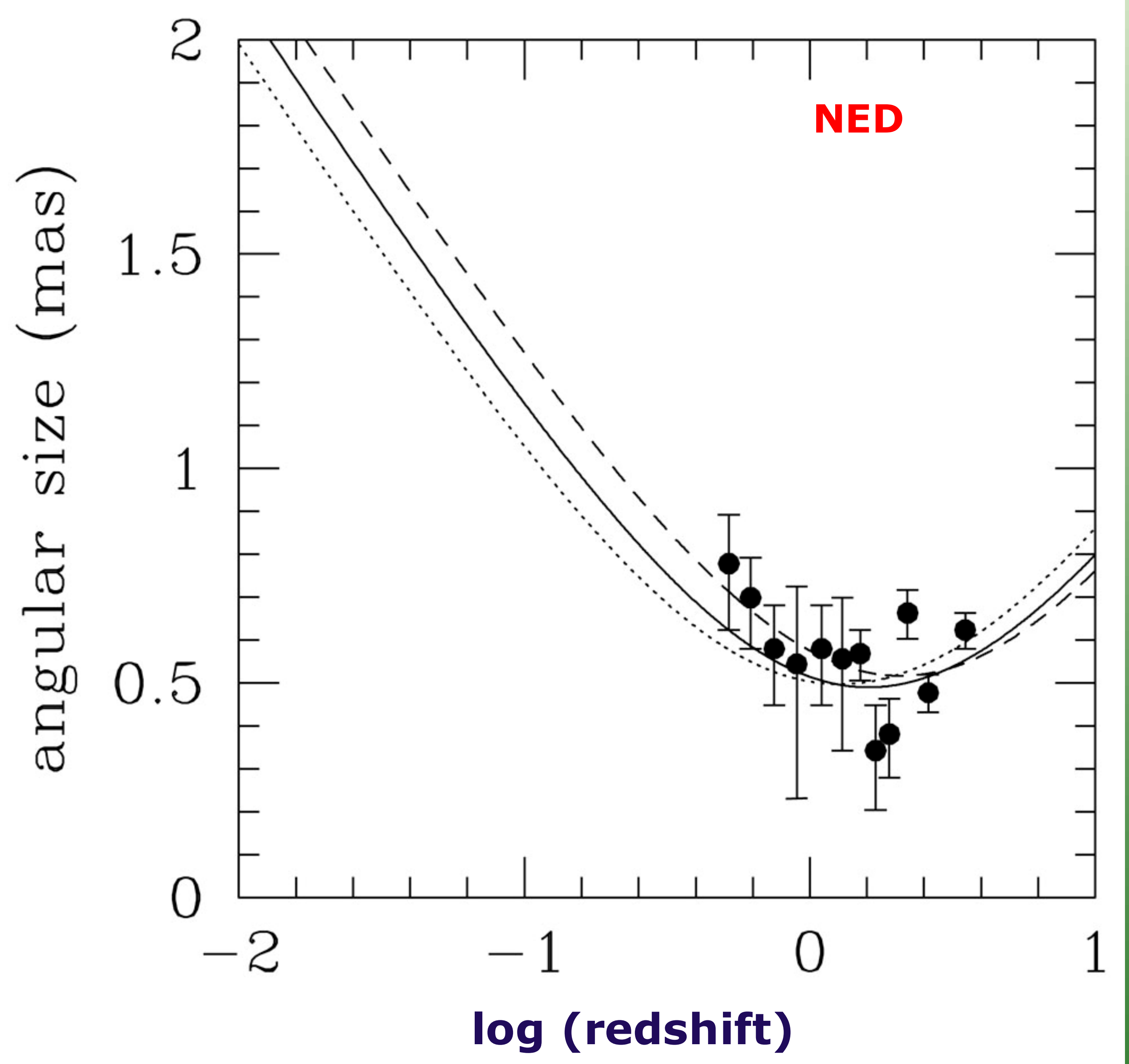
11.3.Distancias vs. redshift



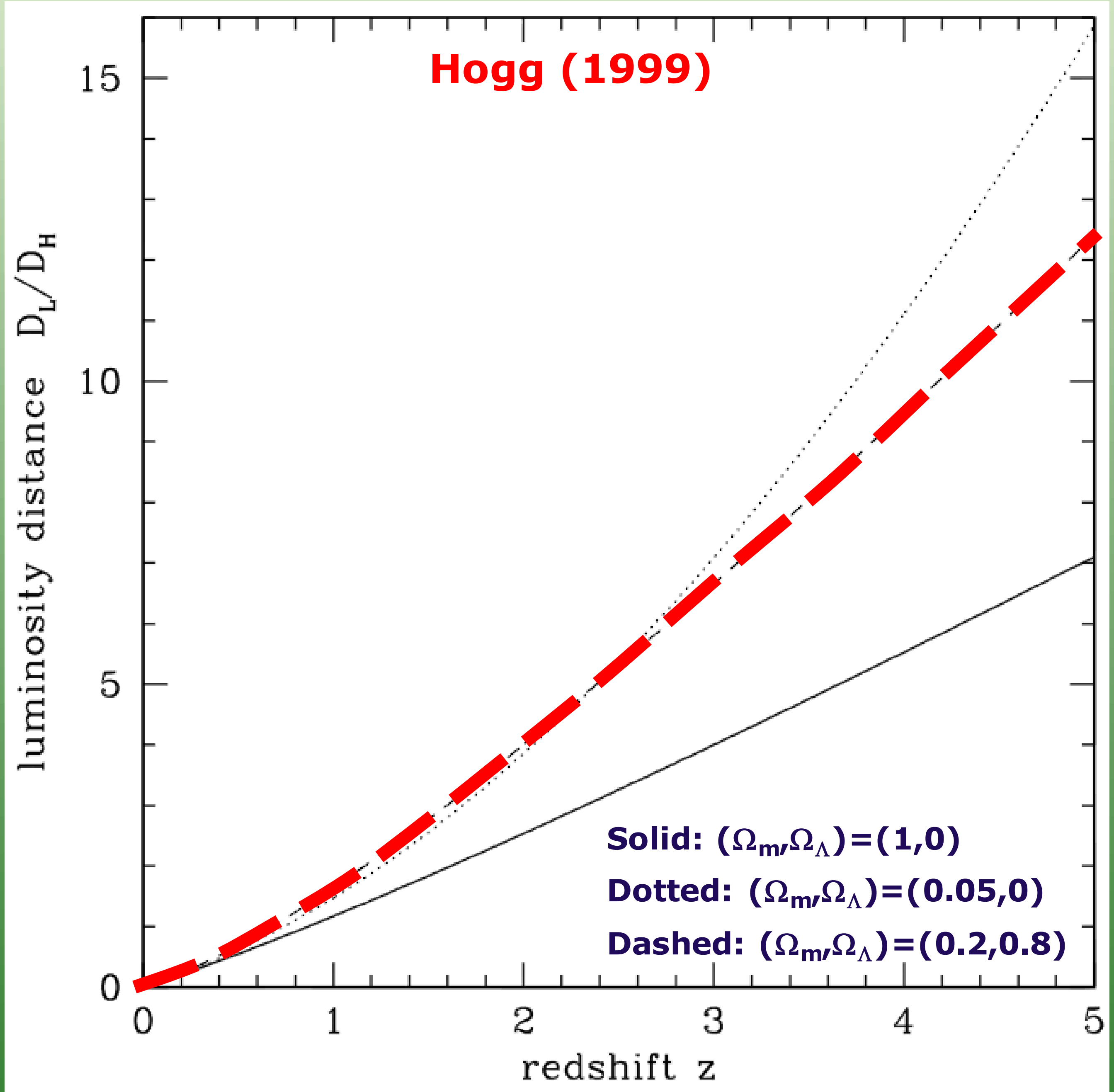
11.3.Distancias vs. redshift



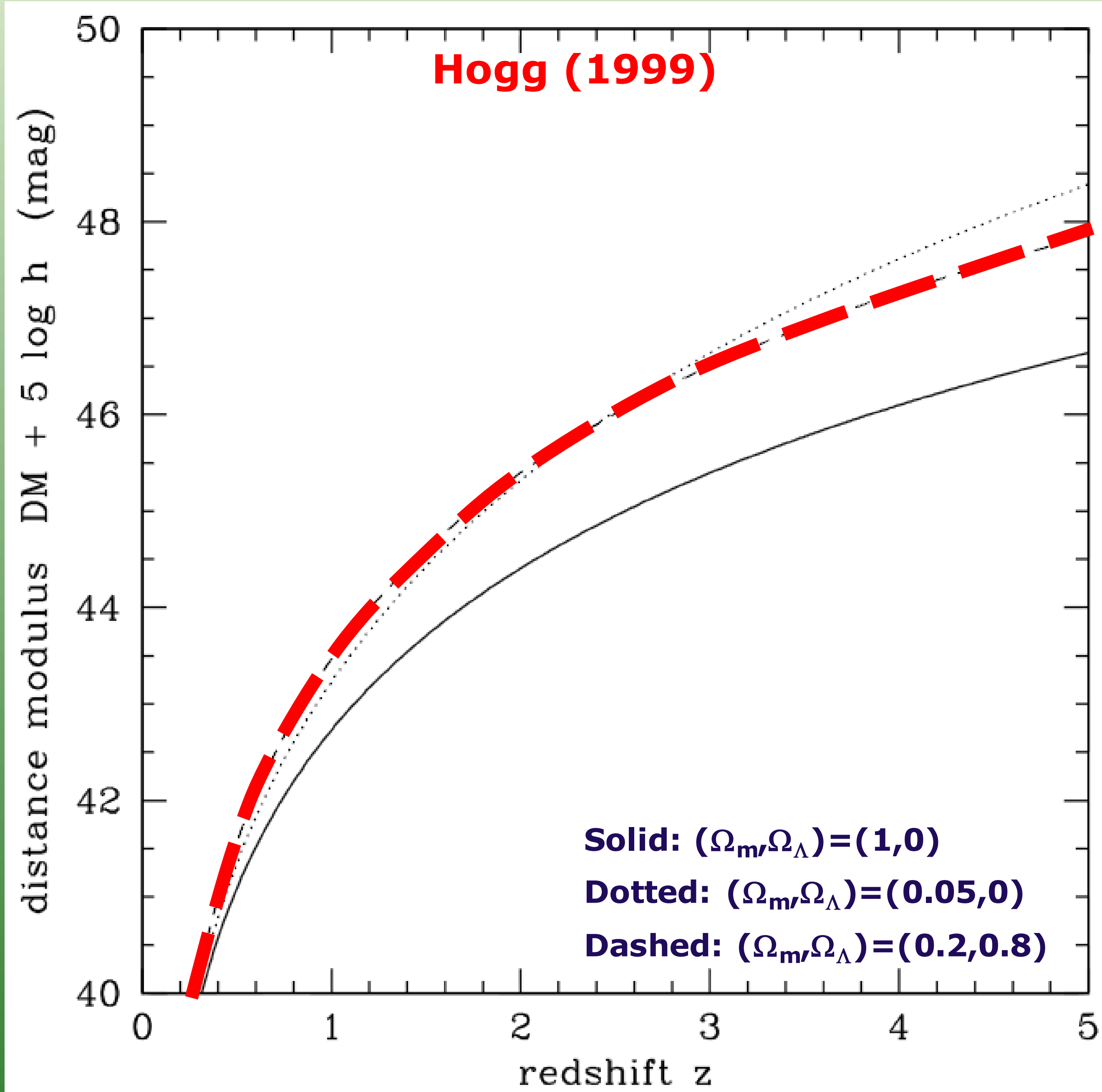
11.3.Distancias vs. redshift



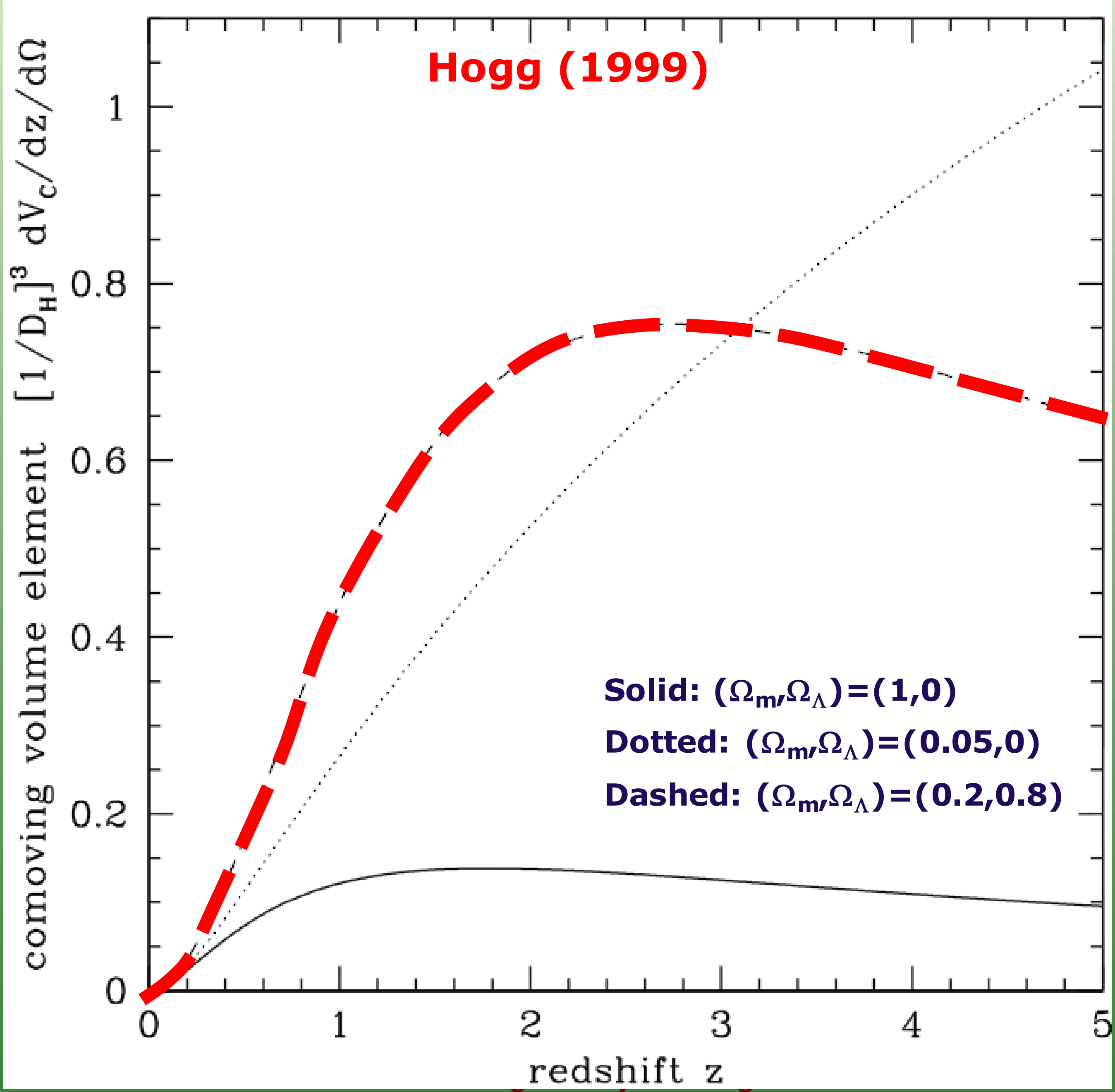
11.3.Distancias vs. redshift



11.3.Distancias vs. redshift



11.3.Distancias vs. redshift



11.4.La edad del Universo

El tiempo transcurrido entre 2 eventos se puede calcular a partir de la métrica como:

$$dt = \frac{dt}{da} da = \frac{da}{\dot{a}} = \frac{da}{aH}$$

Sustituyendo el parámetro de Hubble por su valor en función de los parámetros de densidad, e integrando entre a=1 (actual) y a=0 (correspondiente a t=0), obtendríamos la edad del Universo:

$$t(a) = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\left(\Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}a^{2} - \left[1 - \left(\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}\right)\right]\right)}}$$

Para el caso concreto en que no hay constante cosmológica, y el Universo tiene una densidad igual a la crítica (con lo que también el parámetro de densidad de radiación es 0):

$$t(a) = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\left(a^{-1}\right)}} \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6.7h^{-1}\,Gyr$$

11.4. La edad del Universo

Relacionando el factor de escala con el redshift:

$$(1+z) = a^{-1} \Rightarrow dz = -\frac{da}{a^2} = -(1+z)^2 da$$

$$t(a) = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{aE(a)} \Rightarrow t(z=\infty) = -\frac{1}{H_0}\int_\infty^0 \frac{(1+z')dz'}{(1+z')^2 E(z')}$$

$$t(z=\infty) = \frac{1}{H_0}\int_0^\infty \frac{dz'}{(1+z')E(z')}$$

En general:

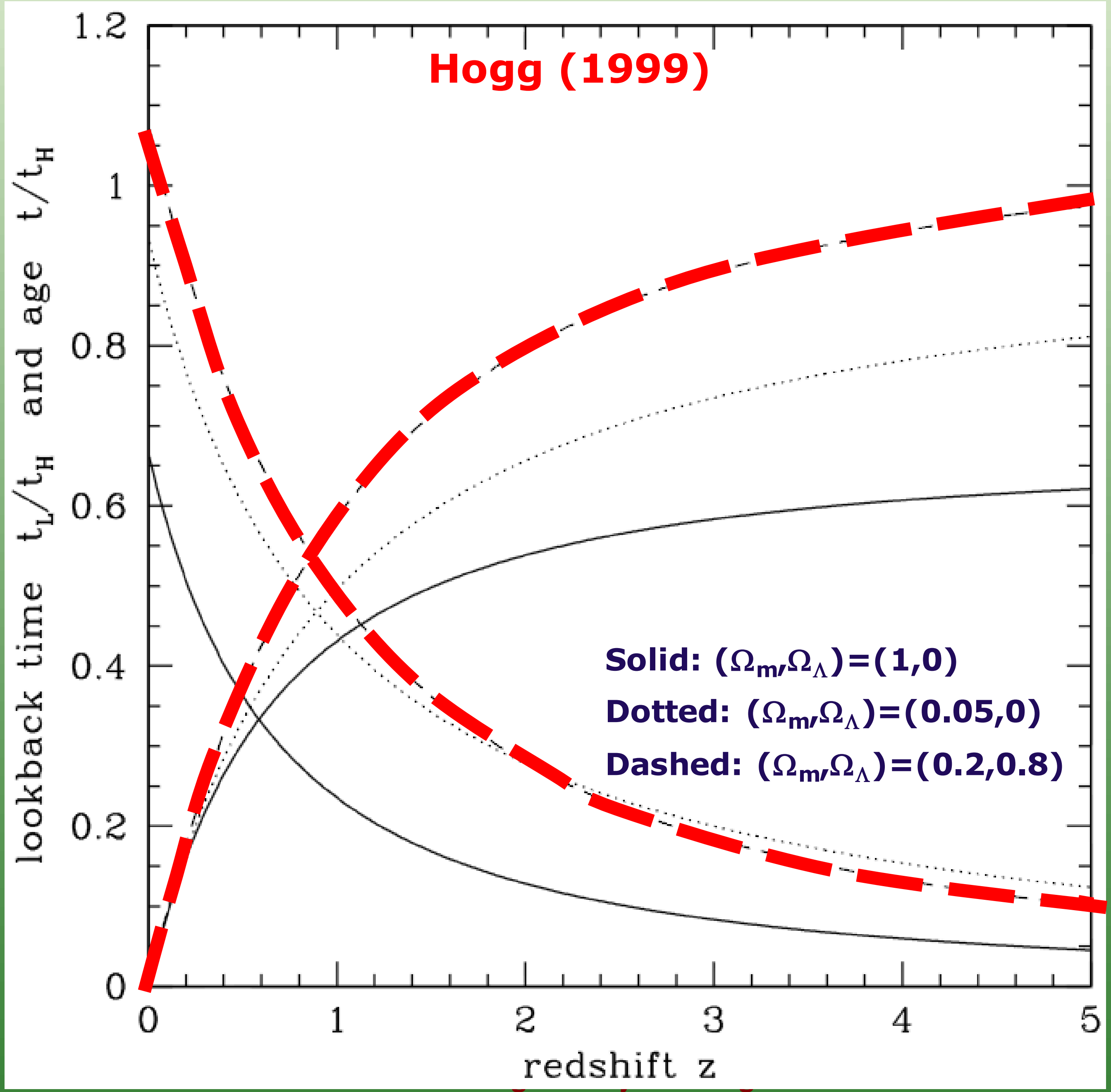
$$\boxed{t_L(z) = t_H \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z')}} \qquad \boxed{t_H = \frac{1}{H_0}}$$

Este es el "lookback time", tiempo transcurrido desde un redshift z hasta nuestros días.

También se podría hablar de la edad del Universo a un determinado z:

$$t_{age}(z) = t_H \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')E(z')}$$

11.4.Distancias vs. redshift



11.4.Distancias vs. redshift

http://icosmos.co.uk/

http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html

Resumen

- Concepto de métrica.
- Introducción de la constante cosmológica en las ecuaciones de Friedmann y del fluido.
- Tipos de modelos cosmológicos incluyendo Λ.
- Ecuación de estado de la constante cosmológica. Generalización a la quintaesencia. Soluciones con Λ.
- Conceptos de distancias. ¿Cómo se calculan? Ecuación del rayo de luz.
- ¿Cómo se calculan tiempos en Cosmología (edad, lookback time –tiempo transcurrido-,…)?